ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI
SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO
Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF
SPACE REPRESENTATION SCIENCES
Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

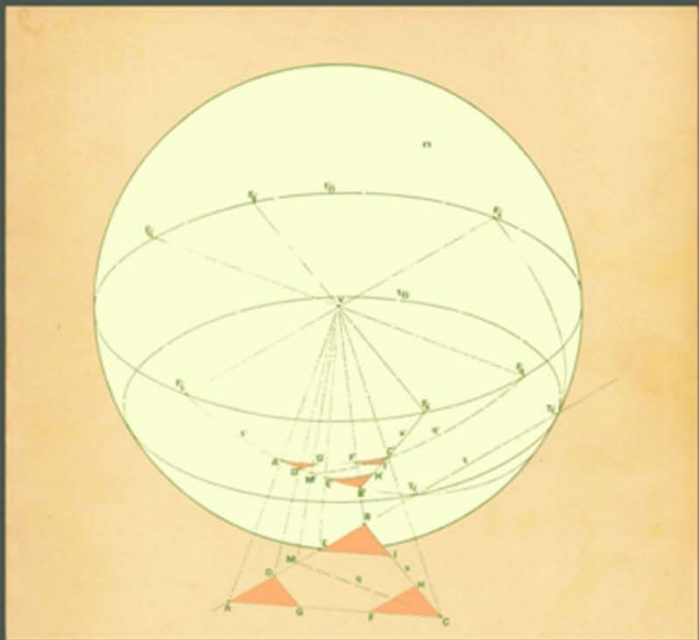
Palermo, Italia

Università degli Studi di Palermo

Giuseppe Maria Catalano

PROSPETTIVA SFERICA

Punto di vista al centro del quadro sferico



1986

Presentazione

La conoscenza, la figurazione e la trasformazione di morfologie geometriche, operando senza mediazioni su quadro sferico al cui centro sia posto l'osservatore, rappresentano obiettivi di immediato fascino e di audace impegno. Il poter tracciare su superficie quadrica, con determinatezza ed efficacia, l'organizzazione di rapporti metrici e posizionali di corpi, in un contesto che rifiuti le comuni fasi preparatorie, costituisce insieme un rischio immanente ed un vanto ripagante. L'operatività interpretativa della metodologia, di base essenzialmente sperimentale, attinge necessariamente ad una scrupolosa analisi del geometrico astratto. Tuttavia la trattazione si evolve programmaticamente e finalisticamente verso la sintesi manifestamente pratica dell'attività professionale. L'impostazione rigorosa del presente studio non appare fine a se stessa, ma è da ritenere un significativo contributo scientifico alla ricerca della rispondenza ottimale alle moderne problematiche rappresentative della progettualità ambientale. La tematica affrontata può considerarsi promozionale più di incrementi culturali dagli interessanti sviluppi, che di eclatanti applicazioni di occasionale evenienza. Sin dal primo esame si riconosce la validità di una esposizione persuasiva, originale, ricca di spunti, gestita con informazione, senza enfasi, coordinata e approfondita, coerente nei risultati. Per i contenuti apprezzati e condivisi, segnalo all'attenzione degli studiosi la monografia dell'ing. G. M. Catalano, con i migliori auguri.

Michele Inzerillo

Premessa

Fra le quadriche impegnate e comunque di comune e non difficile approccio possiamo considerare la superficie sferica di centro C e raggio R, scelta a costituire il quadro non piano di una prospettiva operata da un punto di vista V la cui localizzazione relativa ammetta diverse possibilità posizionali: centrale, interna, superficiale, esterna.

In questo studio si è esaminata la prima ipotesi, ma l'interesse suscitato e i risultati ottenuti spronano vivamente a sviluppare tutta la casistica citata.

Il quadro sferico potrà, dunque, comprendere i comuni riferimenti spaziali e potrà garantire operatività spaziali ben definibili.

Le inevitabili difficoltà interpretative (derivanti dalla necessaria mediazione grafica con altre metodologie di rappresentazione) del quadro π non sviluppabile, richiedono allo studioso il particolare sforzo di una visione spaziale che deve essere presente, fantasiosa, attiva e rigorosa, che deve sapere esplicitare e cogliere sia dal testo, sia dalle figurazioni gli elementi sufficienti per muoversi correttamente nella configurazione immaginata.

Il poter condurre il processo spaziale supportato da un modello emisferico non esime la ragione dall'introspezione analitica e di sintesi, dal prudenziale arrampicarsi per induzioni e deduzioni, restando la capacità di riflessione e il buon livello di preparazione di base le fondamentali prerogative per superare la farraginosità di spazialità materiali dalle prestazioni notoriamente limitate in relazione alla loro costruzione.

Anche le frequenti rielaborazioni di operazioni e concetti, validi per problemi trattati rispetto al quadro prospettico piano, non sempre risponderanno allo scopo di determinare la soluzione per il quadro sferico, richiedendosi più spesso una impostazione di orientamento notevolmente diverso.

Si evince perciò l'indicazione di ricercare un linguaggio pressoché originale, una mentalità più propensa a ragioni nuove, che non al riuso di ragionamenti, isolando e raccogliendo dalle proprie conoscenze quelle effettivamente produttive di sviluppo non condizionato.

Nella trattazione che segue si evidenzieranno via via i motivi di maggiore attenzione scientifica, degni di essere puntualizzati per la loro incidenza nella caratterizzazione del processo in esame.

8.

Rette proiettanti (Tav. 1)

Qualsiasi retta contenente V, centro di proiezione, è proiettante. L'intersezione col quadro sferico della retta proiettante il generico punto P e sempre data da due punti diametralmente opposti, che costituiscono le tracce della retta e al contempo la sua immagine prospettica, essendo proiettati in essi tutti i suoi punti, compreso il punto all'infinito.

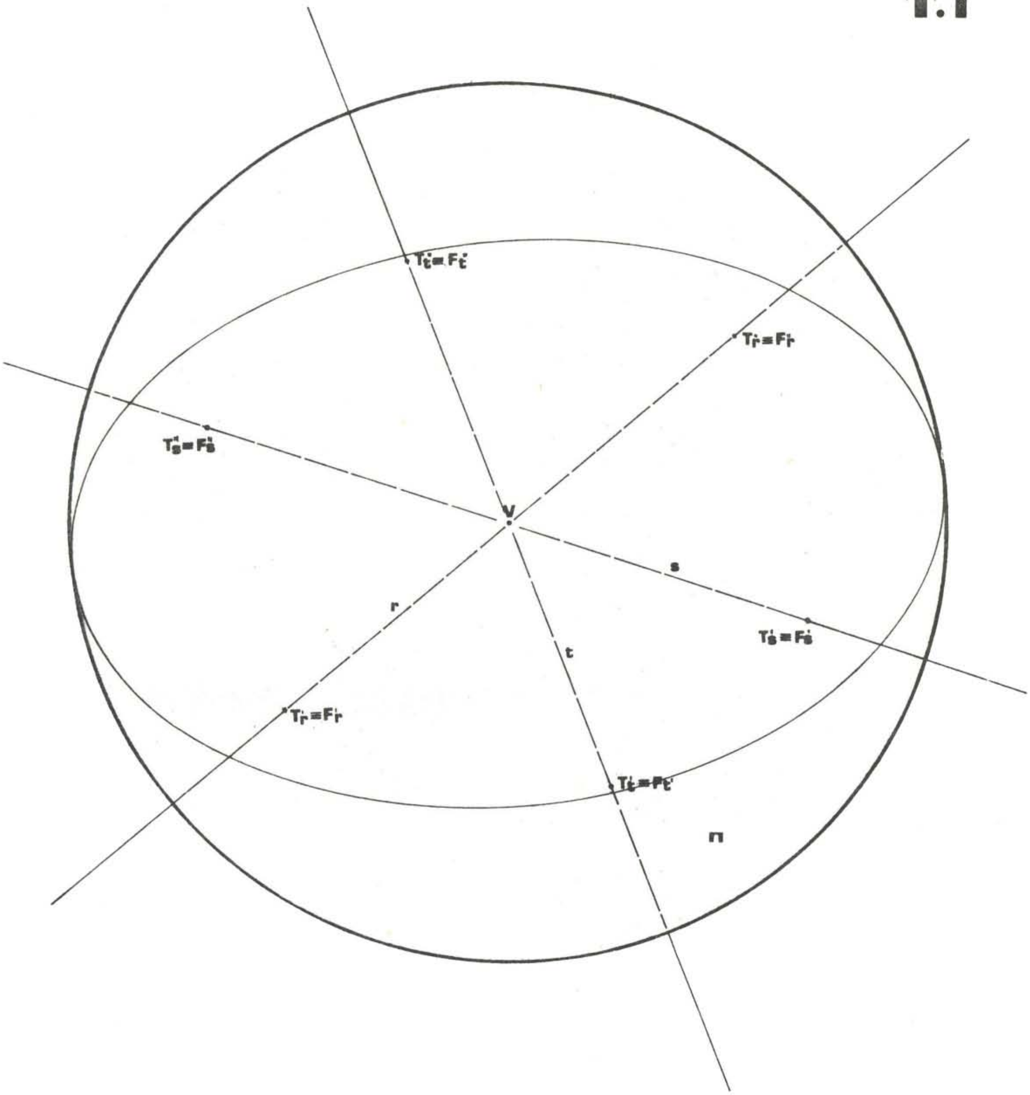
Cosi la retta r, come la s e la t, avrà tracce T'r e T''r coincidenti ciascuna con la sua prospettiva e col suo punto di fuga F'r. Ma se il considerare di una retta due immagini prospettiche è geometricamente corretto, ciò potrebbe apparire inconcepibile nello sviluppo di un linguaggio rappresentativo che, come tale, deve fornire sensazioni realistiche.

In effetti il raffronto con la teoria della prospettiva piana (quadro piano) in cui al massimo è concepibile rappresentare un semispazio (1), solleciterebbe la definizione di uno specifico limite spaziale (2); ma ciò in una visione statica del centro di proiezione V inteso come punto di vista. Se, infatti, ruotiamo comunque l'asse ottico, mantenendo fisso V, in un quadro sferico completo si potrà rappresentare e percepire l'intero spazio nella sua infinità, traendone la felice conclusione che, laddove sarà possibile, questo nuovo linguaggio permetterà di ampliare la capacita rappresentativa. Queste considerazioni giustificano e approvano la possibile presenza, in dipendenza della estensione del quadro, di due tracce o, comunque, in generale, come vedremo in seguito, la duplicazione di alcuni elementi, unici nella prospettiva piana. E' chiaro allora, in questa visione, come, ad esempio, in T'r si possano pensare proiettati tutti i punti della semiretta avente origine in V e contenente T'r ed in particolare il punto P. Tuttavia la coincidenza di P', immagine prospettica di P, con r' e, cioè, con la prospettiva di tutti i punti di r, non ci permette di restituire, qualora si voglia, la posizione obiettiva spaziale di P. Ma tale restituzione è possibile, come si esaminerà in seguito, se è nota un'altra retta per P non proiettante.

(1) - Il piano limite, piano parallelo per V al quadro, separa lo spazio infinito in due semispazi, e la verosimiglianza con la visione umana suggerisce, come si sa, di rappresentare dei due, al più, solo quello contenente il quadro.

(2) - Un piano limite dividerebbe la sfera in due emisferi: uno solo verrebbe usato come quadro ed in esso ricadrebbe in generale una sola traccia della retta, tranne il caso in cui essa appartenga proprio al detto piano.

T.1



10.

Rette non proiettanti (Tav. 2)

La prospettiva della generica retta non proiettante è una semicirconferenza massima.

Il piano, contenente il centro di proiezione e la retta, proiettante i punti di questa sul quadro, interseca, infatti, quest'ultima secondo una circonferenza massima.

Sulla semicirconferenza prospettiva si possono individuare alcuni punti singolari, immagini prospettiche di particolari punti della retta.

Essa può essere esterna al quadro, come la retta s, che è priva di traccia (traccia immaginaria); può tangere il quadro in un punto, come la q, che ha traccia Tq nel punto di tangenza; può infine secare il quadro, come la r, che dispone di due tracce, T'r e T"r.

Oltre le tracce, altri punti singolari sono i punti di fuga, ovvero, le immagini prospettiche dei punti all'infinito della retta. I punti di fuga sono sempre due per qualsiasi retta trattandosi infatti dei punti intersezione della retta proiettante, parallela alla retta data, col quadro π .

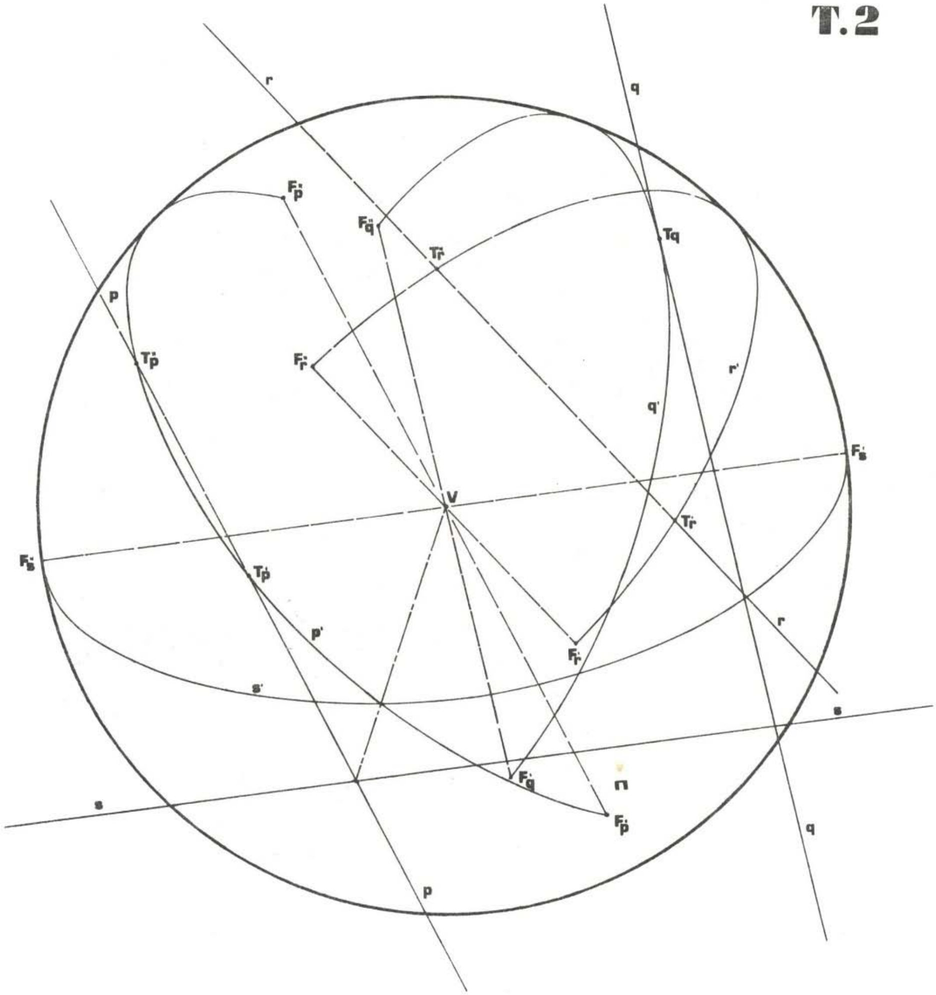
Nel caso in cui la retta, come la r, disponga di due tracce T'r e T"r, l'arco della semicirconferenza prospettiva r', compreso fra di esse, rappresenta la prospettiva del tratto di r interno al quadro. In tutti gli altri casi (traccia unica o immaginaria), escludendo le tracce, tutti i punti della semicirconferenza prospettiva sono sempre prospettive di punti esterni al quadro.

Bisogna ancora osservare come per la generica retta r secante si abbia l'eguaglianza degli archi prospettici compresi tra T'r ed F'r e tra T"r ed F"r, come pure per la generica retta q tangente si abbia l'eguaglianza degli archi compresi tra Tq ed F'r e tra Tq ed F"r.

Se la retta ha traccia immaginaria non è possibile la determinazione della sua posizione obiettiva spaziale se non è nota almeno la posizione di un suo punto; e di un punto è nota la posizione se è rappresentata una retta, cui appartiene, avente traccia o tracce reali sul quadro.

Se ne conclude che il tracciamento o la restituzione di una retta esterna al quadro impone la presenza di una retta p incidente s e secante o tangente il quadro.

T.2



12.

Piani proiettanti (Tav. 3)

Qualsiasi piano contenente il centro di proiezione V è proiettante.

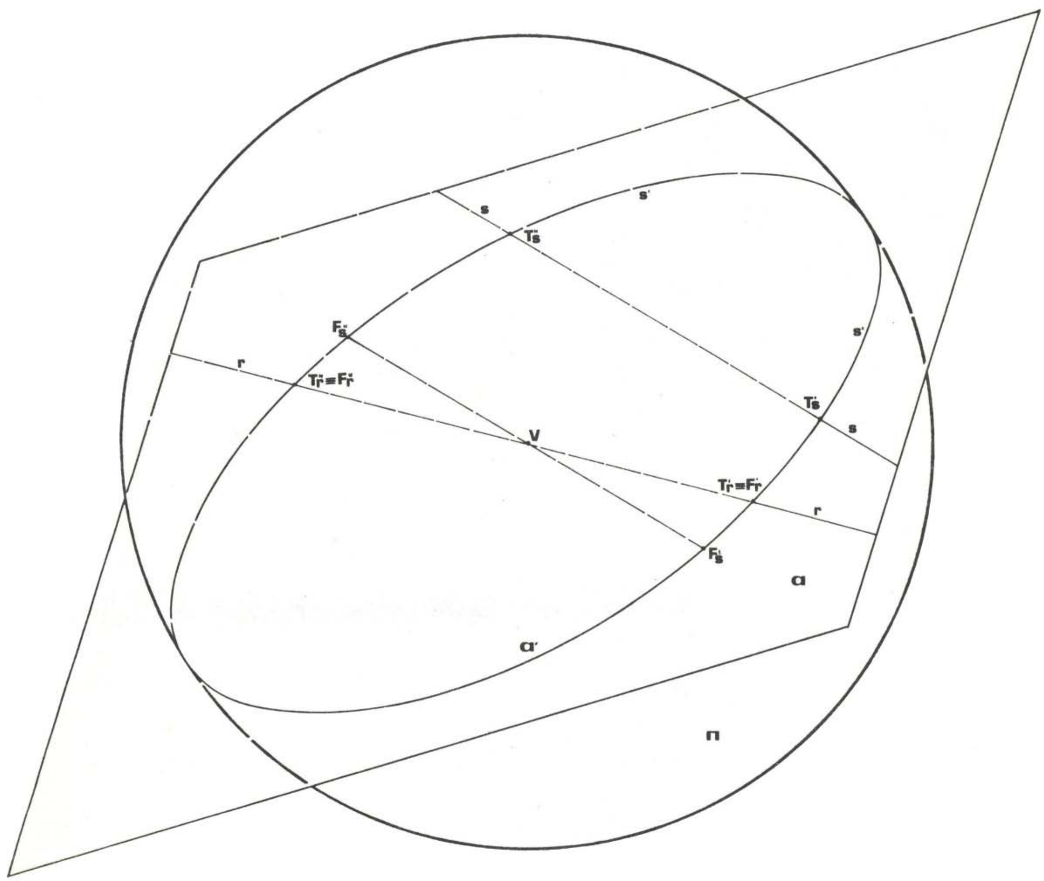
L'intersezione di un piano proiettante con il quadro sferico è sempre data da una circonferenza massima, che costituisce la traccia del piano e insieme la sua immagine prospettica, essendo proiettati in essa tutti i suoi punti, compresi i punti all'infinito, e tutte le sue rette, compresa la retta all'infinito.

Pertanto il piano α proiettante avra la traccia t_α coincidente con la sua immagine prospettica α' e con la sua "circonferenza fuga" f'_α. .

La generica retta r proiettante, appartenente ad α , avrà tracce T'r e T"r, prospettiva r' e punti di fuga F'r ed F"r, coincidenti in due punti di α.

La generica retta s non proiettante appartenente ad α avrà, come si è detto, prospettiva s' coincidente con la prospettiva α' e quindi tracce T's e T"s, nonché fughe F's ed F"s, appartenenti a questa.

T. 3



14.

Piani non proiettanti (Tavole 4, 5, 6)

La prospettiva del generico piano proiettante è uno dei due emisferi in cui il quadro è diviso dalla prospettiva della retta all'infinito del piano, che è sempre data da una circonferenza massima, intersezione del piano proiettante, parallelo al piano assegnato, col quadro; tale circonferenza massima può denominarsi come "circonferenza di fuga" del piano, essendo costituita da tutti i punti di fuga delle rette appartenenti ad esso.

II piano non proiettante può secare il quadro secondo una circonferenza, che ne costituisce la traccia, parallela alla circonferenza di fuga, o può tangere il quadro in un punto, che ne è ancora la traccia egualmente distante da qualsiasi punto della circonferenza di fuga.

In entrambi i casi la traccia definirà l'emisfero prospettiva del piano in oggetto.

Se invece il piano, essendo esterno al quadro, ha traccia immaginaria, non è possibile individuarne l'emisfero prospettiva e la posizione obiettiva spaziale, se non è noto almeno un suo punto (e cioè una retta contenente il punto e provvista di tracce, o traccia, e fughe).

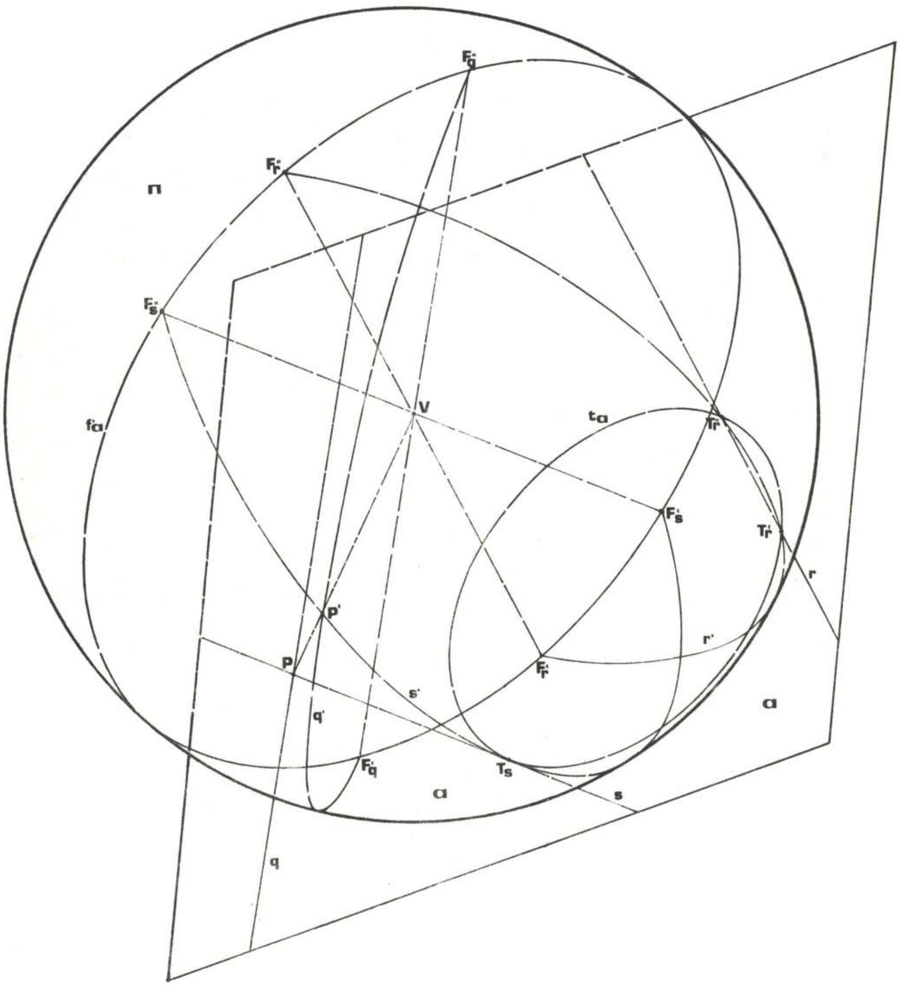
a) Piano secante il quadro

Il piano α , che seca il quadro (Tav. 4), ha traccia in $t\alpha$: tutti i punti appartenenti alla calotta delimitata dalla $t\alpha$ sono la prospettiva dei punti di α distanti da V meno del raggio, mentre i punti contenuti, nella corona sferica compresa tra $f'\alpha$ e $t\alpha$ sono la prospettiva di tutti i punti esterni al quadro (aventi, cioè, distanza da V maggiore del raggio).

La generica retta del piano α ha fughe sulla fuga $f'\alpha$: essa potrà secare il quadro, come la r, nelle due tracce T'r e T"r appartenenti alla traccia $t\alpha$; potrà tangere il quadro, come la s, nell'unica traccia Ts appartenente sempre a $t\alpha$; o infine potrà essere esterna al quadro, ma pur sempre su α, come la q, che quindi ha traccia immaginaria.

Si evidenzia come, pur avendo il piano α traccia $t\alpha$, ciò non basta a determinare la posizione obiettiva spaziale della retta q , se non è nota la posizione di un suo punto P.

T.4



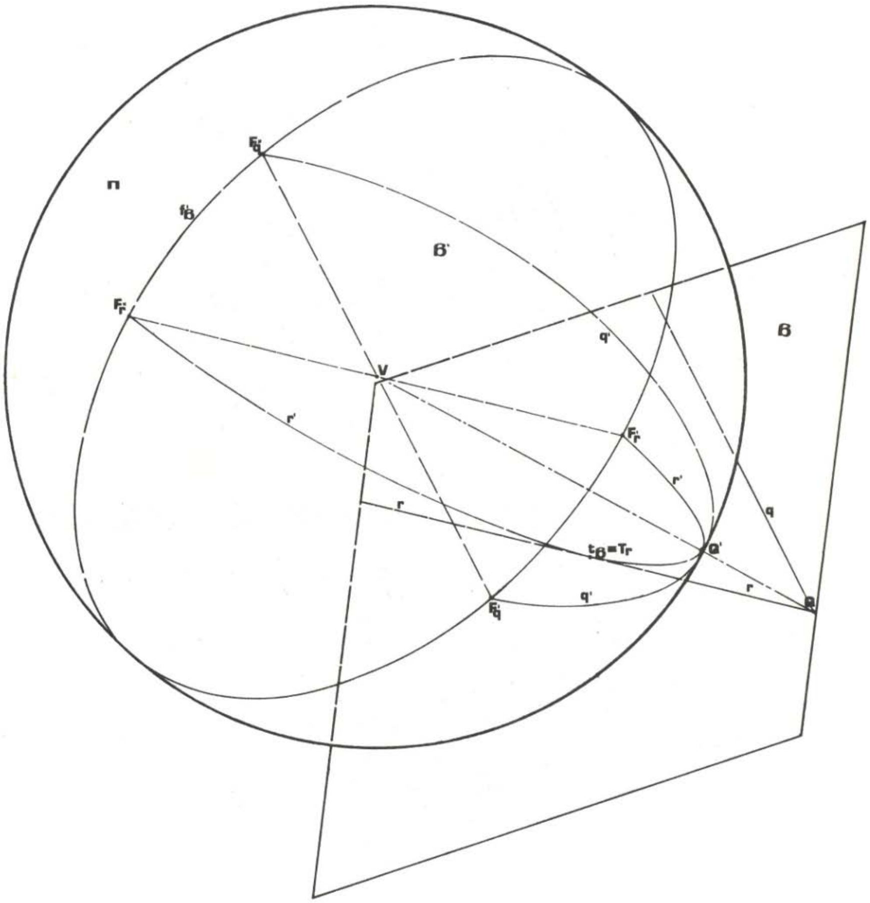
16.

b) Piano tangente il quadro

Il piano β , che tange la sfera quadro (Tav. 5), ha traccia nel punto di tangenza tβ : tutti i punti appartenenti all'emisfero compreso tra f 'β e tβ sono la prospettiva di tutti i punti del piano.

La generica retta di β ha fughe nella fuga f 'β di β : essa potrà tangere il quadro, come la r, ed avere l'unica traccia Tr coincidente con la traccia del piano, oppure essere esterna al quadro, come la q, ed avere quindi traccia immaginaria.

T.5



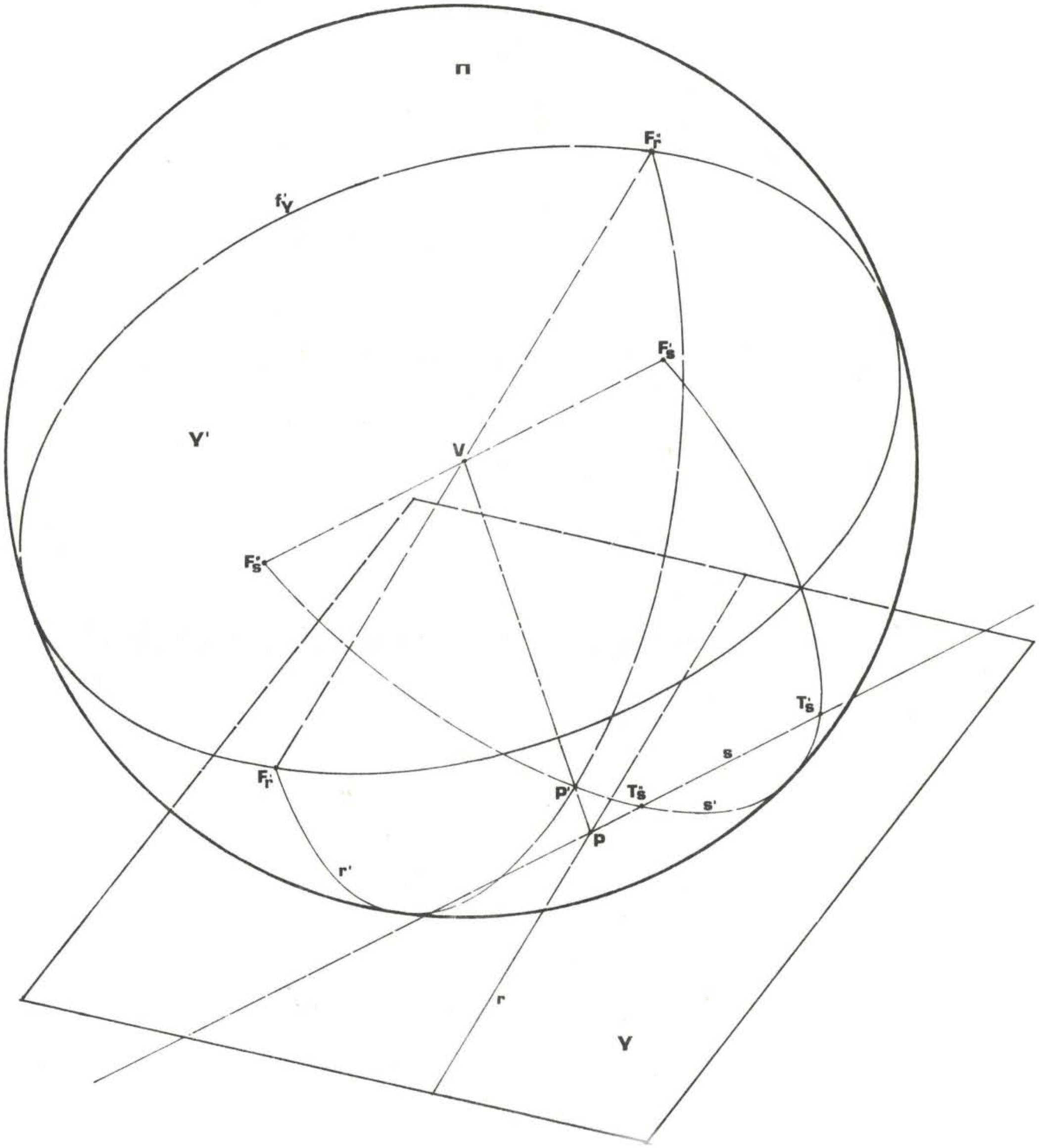
18.

c) Piano esterno al quadro

Il piano γ , che è esterno al quadro (Tav. 6), è individuato dal suo punto P sulla retta s di tracce T's e T''s e fughe F's ed F''s; tutti i punti appartenenti all'emisfero limitato da f 'γ e contenente P', prospettiva di P, sono la prospettiva di tutti i punti del piano.

E' evidente che nessuna retta di γ può essere nota se non è nota la posizione di un punto di essa.

T.6



20.

Concetti di appartenenza (Tav. 7)

Riepilogando e precisando quanto già espresso in precedenza sull'appartenenza reciproca di enti geometrici in prospettiva su quadro sferico, si può affermare che:

a) Condizione necessaria affinché il punto P appartenga alla retta r (F'r, F''r,T'r,T''r) è che la sua immagine prospettica P' appartenga a quella della retta r. Non è ammissibile la sufficienza di tale condizione, essendoci infiniti punti sulla proiettante P-V, che hanno prospettiva coincidente in P'.

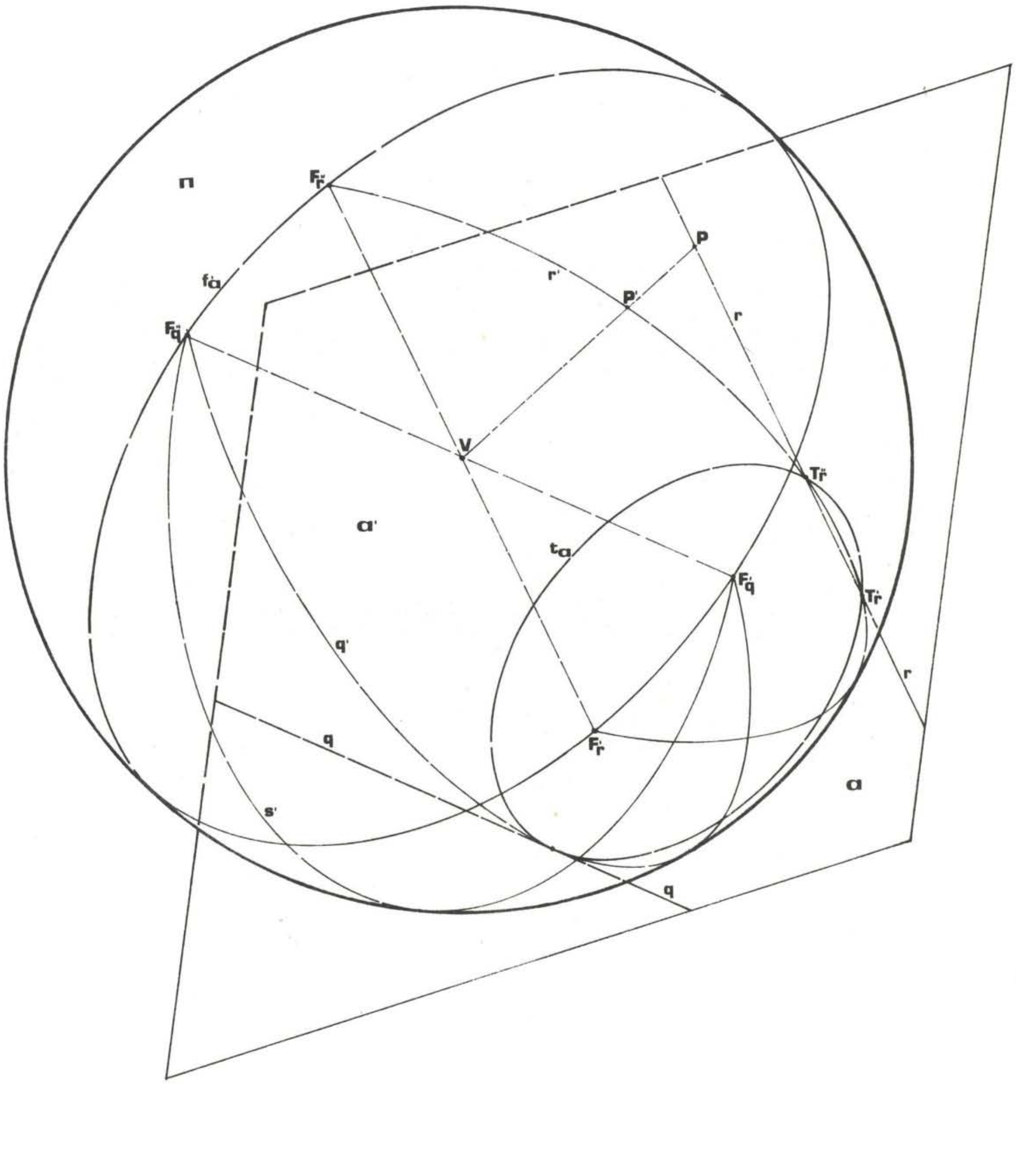
b) Condizione necessaria e sufficiente perché la retta r appartenga al piano α (f 'α ,tα) è che essa abbia tracce T'r e T''r (o traccia Tq) appartenenti alla circonferenza traccia tα del piano e fughe F'r ed F''r (F'q e F''q) appartenenti alla circonferenza di fuga f 'α di α .

Si ricordi che, pur avendo il piano α traccia, esistono infinite rette s appartenenti ad esso, ma prive di traccia. In tali casi la condizione di appartenenza dei punti di fuga F's ed F''s alla fuga f 'α del piano è solo necessaria, ma non sufficiente, in quanto esistono infinite rette aventi lo stesso punto improprio, ma non appartenenti ad α . (Si badi che nella tavola, essendo le rette s e q parallele, i punti di fuga coincidono).

c) Condizione necessaria e sufficiente affinché il punto P appartenga al piano α è che esso appartenga alla retta r di a.

Esso potrà quindi appartenere ad α se appartiene all'emisfero α' immagine prospettica di α ; ma tale condizione non è evidentemente sufficiente, essendoci infiniti punti proiettati nello stesso emisfero non appartenenti ad α.

T.7



22.

Parallelismo fra rette (Tav. 8)

Rette parallele hanno in comune, come si sa, il punto improprio: pertanto esse ammettono, in prospettiva su quadro sferico, gli stessi punti di fuga.

Così le rette r, p ed s secanti il quadro, la retta q tangente il quadro e la retta u ad esso esterna, tutte parallele fra loro, assumono come immagini prospettiche semicirconferenze aventi gli estremi, cioè i punti di fuga, coincidenti.

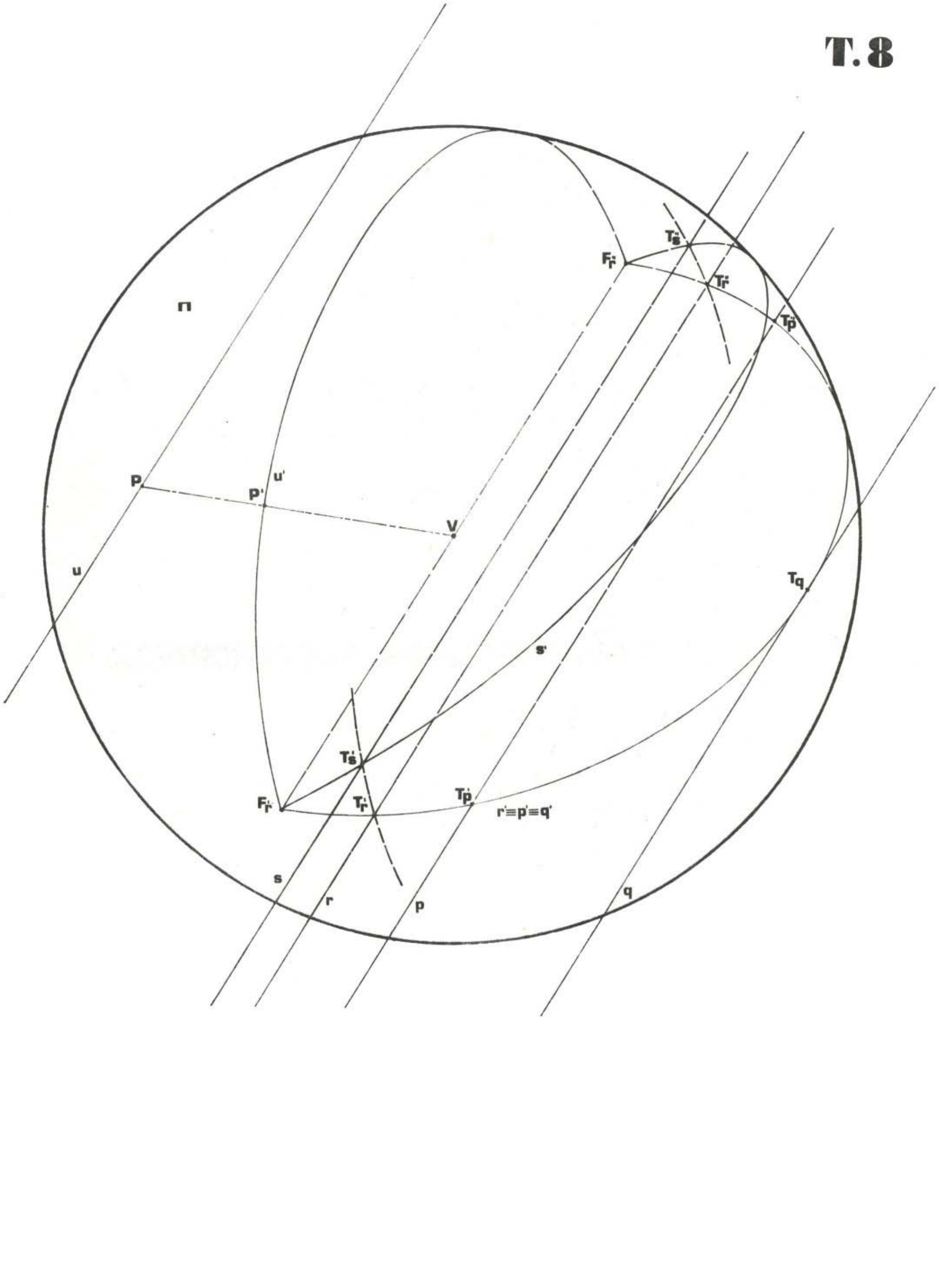
E' interessante notare come l'arco compreso fra le tracce T'r e T'p, delle rette parallele r e p, è uguale all'arco compreso fra le tracce T''r e T''p, cosi come l'arco compreso tra T'p (o T'r) e Tq è uguale all'arco compreso tra T''p (o T''r) e Tq.

Tale circostanza si può ancora rilevare tra la retta r e la s, che non appartengono allo stesso piano proiettante (come le rette r, p e q): l'arco di circonferenza massima compreso tra T'r e T's è uguale all'arco compreso tra T''r e T''s.

Premesso che l'uguaglianza di due archi di circonferenza massima implica l'uguaglianza dei segmenti congiungenti gli estremi di ciascuno di essi, e cioè l'uguaglianza delle distanze fra gli estremi stessi, tutto ciò ci permette di concludere affermando che: due rette aventi tracce egualmente distanti fra loro sono parallele e, cioè, ammettono comuni punti di fuga; punti che, se le due rette non appartengono allo stesso piano proiettante, sono forniti dall'intersezione delle circonferenze massime, immagini prospettiche delle rette date ovvero, in generale, dagli estremi del diametro parallelo alla retta congiungente le tracce.

Se, infine, la retta è esterna, come la u, per verificarne il parallelismo ad un'altra retta, per esempio la r, occorre accertarsi che due punti distinti di essa siano egualmente distanti dalla r.

T. 8



24.

Parallelismo fra retta e piano (Tav. 9)

Se una retta è parallela ad un piano il suo punto improprio appartiene alla retta impropria del piano: se ne deduce che la prospettiva del punto improprio della retta deve necessariamente appartenere alla prospettiva della retta impropria del piano.

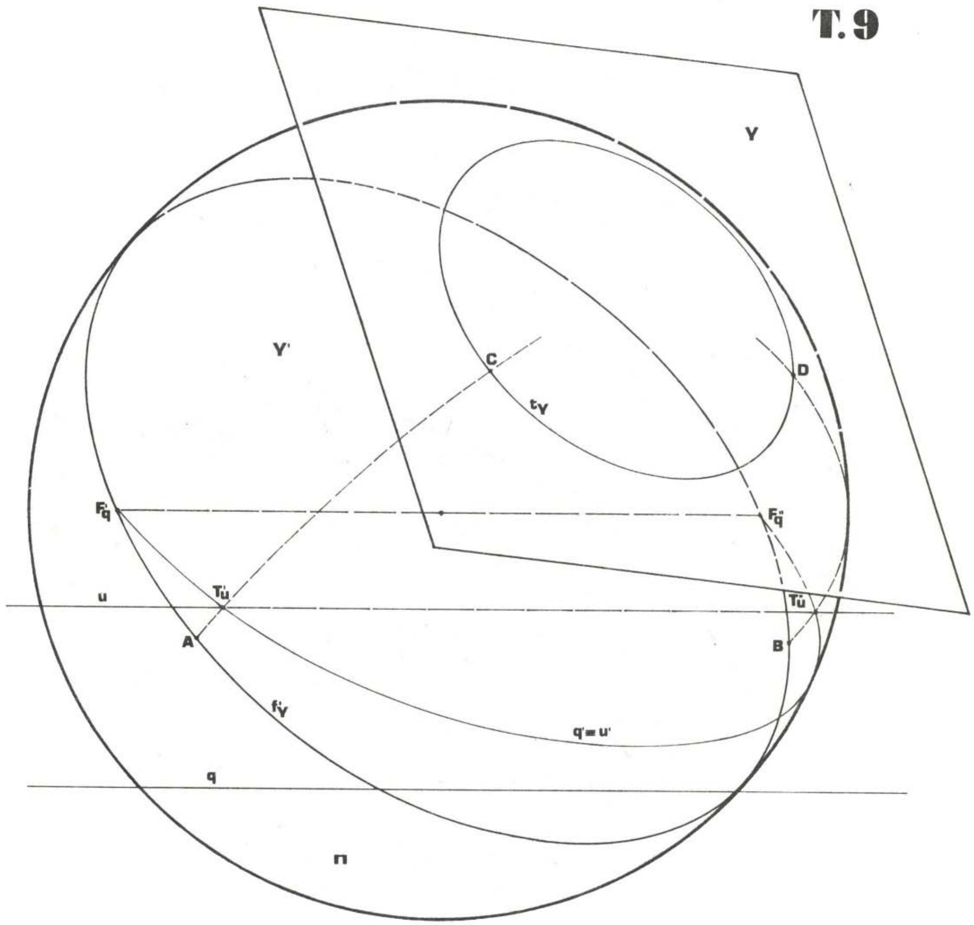
Inoltre, considerando che nessuna retta secante il piano può avere la propria direzione appartenente alla giacitura di esso, si può riassumere affermando che: condizione necessaria e sufficiente, perché una retta sia parallela ad un piano, è che i suoi punti di fuga appartengano alla circonferenza di fuga del piano.

Così la retta q ha i punti di fuga F'q ed F"q sulla circonferenza di fuga f 'γ del piano γ ,cui è parallela.

Se la retta è provvista di tracce, come la u, inviando circonferenze massime passanti per esse ortogonalmente alla fuga f 'γ , si può osservare come gli archi compresi fra ciascuna traccia e il corrispondente punto intersezione con la f 'γ , cioè gli archi fra T'u ed A, ovvero tra T"u e B, sono uguali.

La stessa considerazione può farsi, anziché con la fuga, con la circonferenza traccia t γ del piano γ (l'arco fra T'u e C è uguale all'arco T"u e D) sicché, concludendo si può dire che: se le tracce di una retta distano egualmente dalla fuga o dalla traccia di un piano, detta retta è parallela a quel piano.

T. 9



Perpendicolarità fra retta e piano (Tav. 10)

Se una retta è perpendicolare ad un piano il suo punto improprio è perpendicolare alla retta impropria del piano: se ne trae che la prospettiva del punto improprio della retta è data dall'intersezione col quadro della retta proiettante perpendicolare alla giacitura del piano.

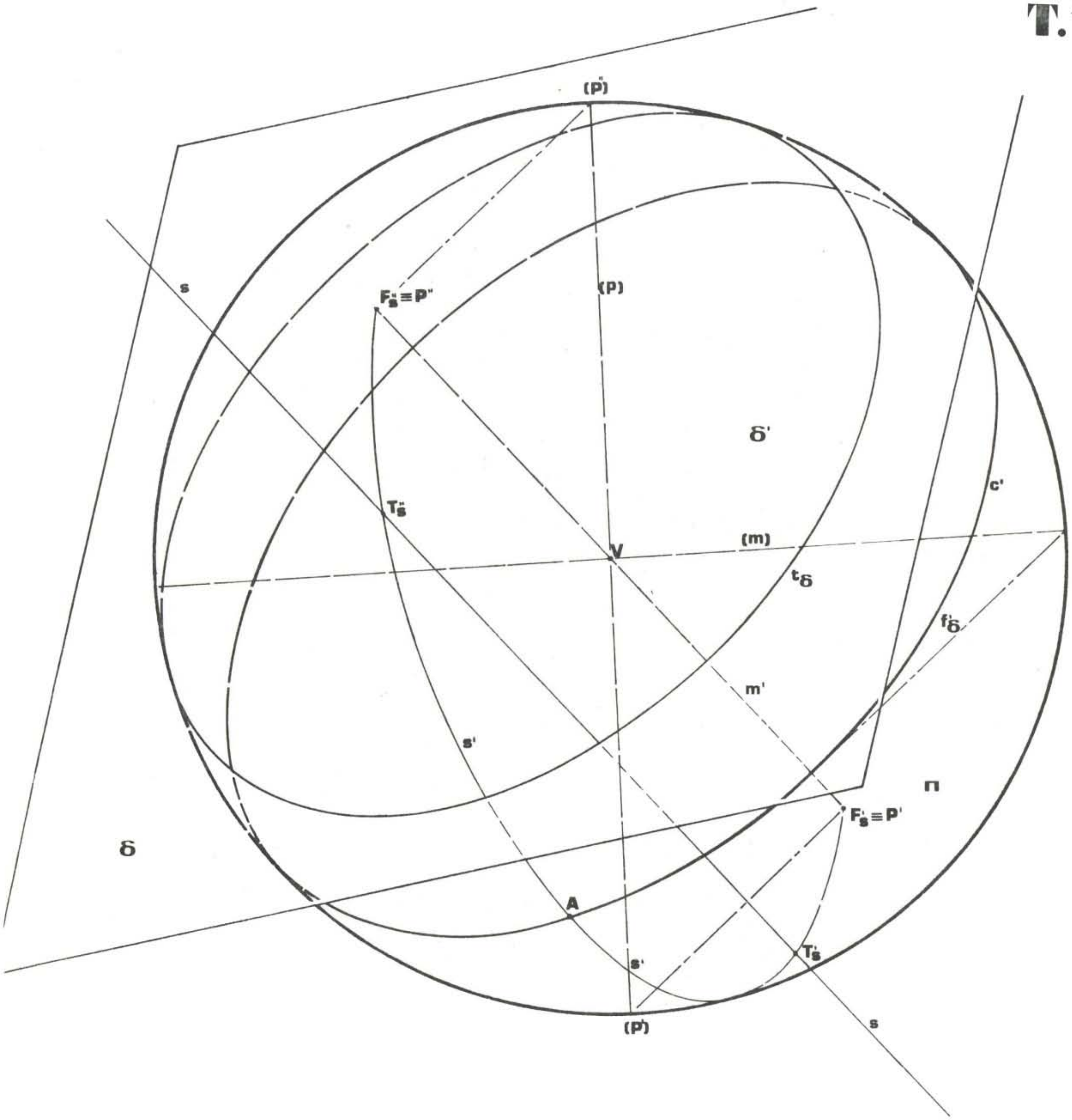
Considerando, poi, che nessuna retta, non perpendicolare al piano, può avere fuga nel punto suddetto, si può affermare che: condizione necessaria e sufficiente, affinché una retta sia perpendicolare ad un piano, è che i suoi punti di fuga appartengono alla proiettante perpendicolare alla circonferenza fuga del piano.

Così la retta s ha i punti di fuga F's ed F"s sulla proiettante perpendicolare alla circonferenza di fuga f 'δ, del piano δ cui è perpendicolare (3). Se la retta è provvista di tracce, come la s, si può notare come gli archi compresi tra ciascuna traccia e il punto A, intersezione della circonferenza prospettiva r' con la circonferenza fuga f 'δ , sono uguali. Si può affermare, allora, che se una retta secante il quadro ha le tracce ugualmente distanti dalla circonferenza fuga di un piano, ciò basta per concludere che la retta è perpendicolare a quel piano (4).

(3) Nella rappresentazione assonometrica di Tav.10 si evidenzia l'immediatezza della costruzione grafica, che lega la assonometria di una circonferenza massima c con quella dei suoi poli, punti intersezione della perpendicolare per V alla c con la sfera. Si ribalti, dunque, sul quadro assonometrico il piano proiettante contenente l'asse minore m' dell'ellisse f ' δ, proiezione della c: il diametro m di quest'ultima si ribalta in (m) e l'asse polare p, ortogonale alla c, in (p), retta perpendicolare alla (m), ottenendo nella circonferenza contorno apparente della sfera i punti (P') e (P"), cioè i poli ribaltati, che raddrizzati forniscono i punti P' e P" (coincidenti con i punti di fuga della retta s) e cioè l'assonometria dei poli richiesta.

(4) - Si ricorda che, noti i punti di fuga di una generica retta, per tracciare la fuga dei piani perpendicolari ad essa, basta fissare gli estremi della centina nei punti suddetti ed effettuare una rotazione completa ponendo la punta tracciante sullo zero della graduazione. Se, viceversa, nota la fuga di un generico piano, si vogliono tracciare i punti di fuga delle perpendicolari ad esso, occorre fissare la centina con gli estremi su un qualsiasi diametro della circonferenza suddetta ed effettuare una rotazione con la punta tracciante sullo zero; quindi ripetere l'operazione fissando gli estremi della centina, su un altro diametro della fuga del piano: l'intersezione fra i due archi tracciati darà i punti di fuga richiesti.

T.10



28.

Perpendicolarità tra rette (Tav. 11)

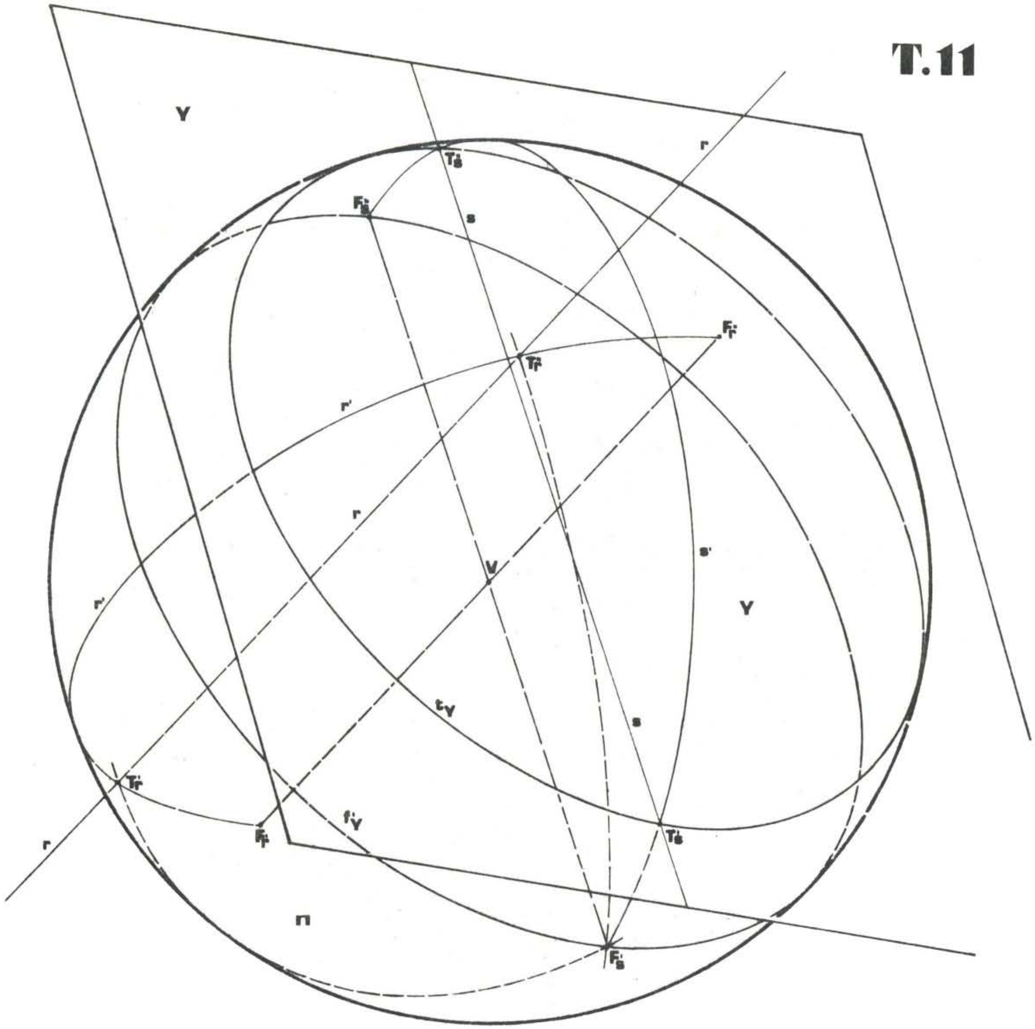
Se una retta r è perpendicolare ad un'altra retta s, il punto improprio della s appartiene alla retta impropria del piano γ contenente la s e perpendicolare alla r: pertanto la prospettiva del punto improprio della s appartiene certamente alla prospettiva della retta impropria del piano γ .

Non essendoci, inoltre, alcuna retta, non perpendicolare alla r, i cui punti di fuga appartengano alla fuga di γ, si può dire, in definitiva che: condizione necessaria e sufficiente perche la retta r sia perpendicolare alla retta s è che i punti fuga F's ed F"s di quest'ultima appartengano alla circonferenza di fuga f ' γ dei piani perpendicolari alla r.

Se la retta, come la r, seca il quadro, inviando circonferenze massime passanti per le tracce T'r e T"r di r e per uno dei punti di fuga di s, ad esempio F's, si può osservare come gli archi compresi fra ciascuna traccia ed F's sono uguali.

La stessa considerazione può farsi evidentemente per le tracce della s nei confronti dei punti di fuga della retta r, sicché se ne può trarre la conclusione che se una retta, secante il quadro, ha tracce egualmente distanti da uno (e quindi anche dall'altro) dei punti di fuga di un'altra retta, essa è perpendicolare a quella retta.

T.11



Parallelismo fra piani (Tav. 12)

Piani paralleli hanno in comune, come è noto, la retta impropria: pertanto essi am mettono in comune la prospettiva della retta impropria e cioè, in prospettiva sferica, la circonferenza fuga.

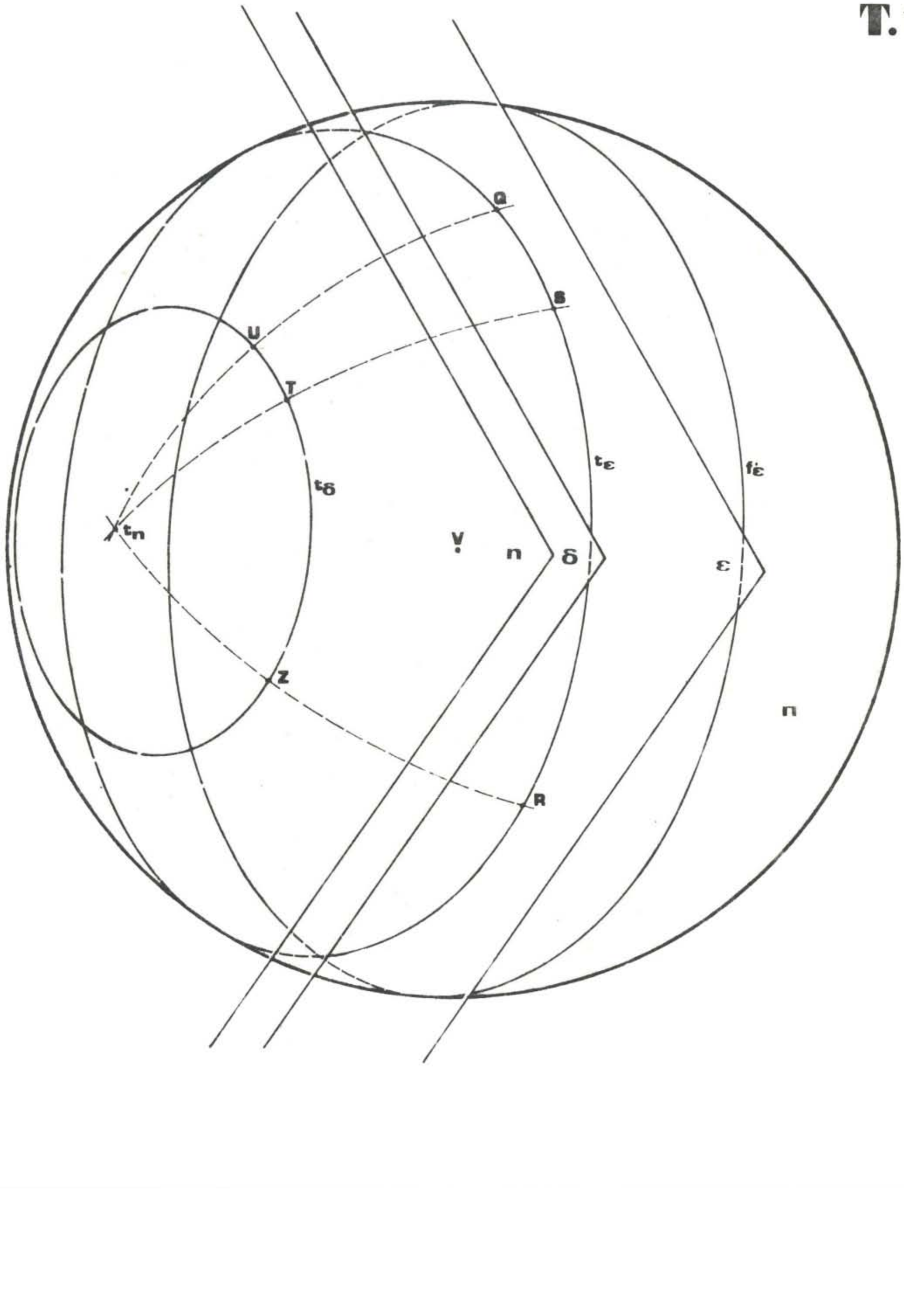
Cosi i piani ε , δ e η , paralleli fra loro, hanno fuga coincidente nella circonferenza massima $f'\varepsilon$.

I piani ε e δ secano il quadro secondo due circonferenze traccia parallele fra loro, mentre il piano η tange il quadro nel punto $t\eta$.

E' evidente che mandando per il punto $t\eta$ tre qualsiasi circonferenze massime intersecanti la circonferenza traccia $t\varepsilon$ di ε nei punti Q, S, R e la traccia $t\delta$ di δ nei punti U, T, Z, gli archi compresi fra i punti U e Q e fra i punti T ed S (ovvero Z ed R) sono uguali, come pure uguali sono gli archi compresi tra $t\eta$ ed il punto Q o tra $t\eta$ ed S, o R.

Dacché si può esser certi che se due circonferenze tracce di piani, ammettono almeno tre punti dell'una egualmente distanti dall'altra, i due piani suddetti sono paralleli, come pure se la traccia di un piano tangente dista egualmente da tre punti di una circonferenza traccia, i due piani sono ancora paralleli.

T.12



Q
S
U
T
t_δ
t_ε
f_ε
t_n
V
n
δ
ε
Z
n
R

32.

Perpendicolarità fra piani (Tav. 13)

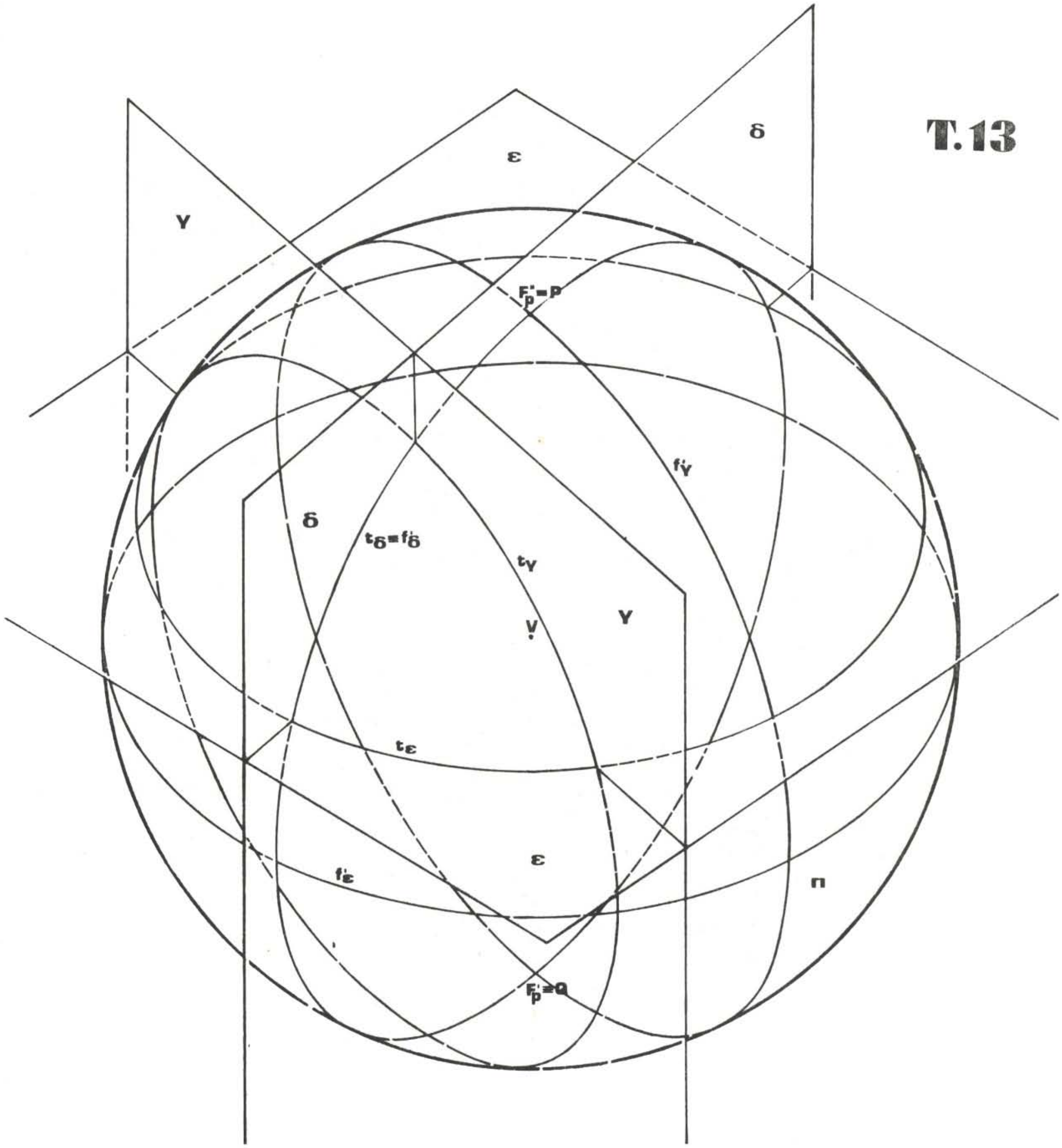
Se due piani sono perpendicolari la retta impropria dell'uno è perpendicolare alla retta impropria dell'altro, per cui la prospettiva della retta impropria dell'uno è perpendicolare alla prospettiva della retta impropria dell'altro.

Così, ad esempio, dati i piani γ ed ε , mutuamente perpendicolari, la circonferenza fuga f 'γ del piano γ è necessariamente perpendicolare alla circonferenza fuga f 'ε del piano ε ; e poiché non è possibile che due piani, non perpendicolari, ammettano circonferenze fughe perpendicolari, tale condizione è anche sufficiente per essere certi della perpendicolarità fra piani.

Se adesso consideriamo un nuovo piano δ (nell'esempio proiettante), perpendicolare anch'esso al piano ε ,avendo i due piani γ e δ infinite rette perpendicolari ad ε , le circonferenze fuga di essi dovranno necessariamente incontrarsi nei punti F'p ed F"p, fuga delle perpendicolari al piano ε.

Pertanto si può dire che se gli archi sulle f 'γ ed f' δ compresi fra i punti P e Q, intersezione delle due circonferenze fuga, e la f 'ε sono uguali, ovvero se gli archi compresi fra P o Q e la f 'ε sono sottesi da angoli retti, allora f 'γ ed f 'δ sono di certo fughe di piani perpendicolari fra loro.

T.13



La centina metrica (Tav. 14)

Lo sviluppo di una teoria sulla prospettiva sferica implica anche l'ipotesi di possibili nuovi strumenti, quali mezzi necessari per l'applicazione stessa dei presupposti teorici.

Per il quadro sferico si ipotizza la costruzione di uno strumento costituito da una centina semicircolare (Tav.14b), di diametro pari a quello del quadro, sulla quale sia possibile far scorrere una punta tracciante P. Si potrà cosi descrivere la circonferenza massima contorno della centina, ma anche infinite circonferenze minori: basterà infatti fissare i due estremi della centina coincidenti con i punti di fuga delle perpendicolari ad una data giacitura e ruotare la stessa per ottenere ad ogni posizione della punta tracciante una nuova circonferenza parallela a quella giacitura.

La centina è poi dotata di due graduazioni fondamentali per l'applicazione della teoria: la prima e una graduazione goniometrica, possibilmente sessagesimale; essa ha lo zero nel punto medio della centina e indica simmetricamente ad esso nei due sensi il valore degli angoli al centro che insistono sulla circonferenza contorno, fino ad un massimo, quindi, di novanta gradi ai due estremi.

La seconda graduazione è, invece, prospettimetrica, disposta cioè per la misura lineare in prospettiva sferica: anch'essa ha lo zero fissato nel punto medio e si estende simmetricamente ad esso nei due sensi; in tal caso il contorno della centina si identifica con la prospettiva della retta tangente il quadro nel punto zero della graduazione, cosicché al punto P', prospettiva del punto P della retta, si associa il valore della distanza che sussiste tra T ed il punto zero di tangenza.

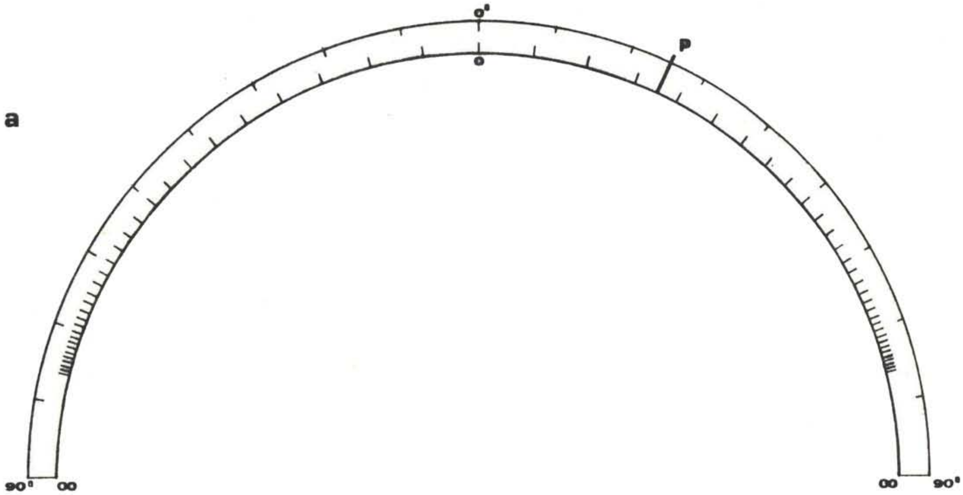
Agli estremi della graduazione avremo ovviamente valore infinito, trattandosi, come si è detto, dei punti di fuga.

Fissando un sistema di riferimento piano con origine O nel centro dell'arco di centina, asse delle ascisse contenente gli estremi e asse delle ordinate contenente il punto zero della graduazione (Tav. 14a), l'equazione del fascio di rette di centro O e l'equazione della circonferenza contorno della centina di raggio R sono, come si sa:

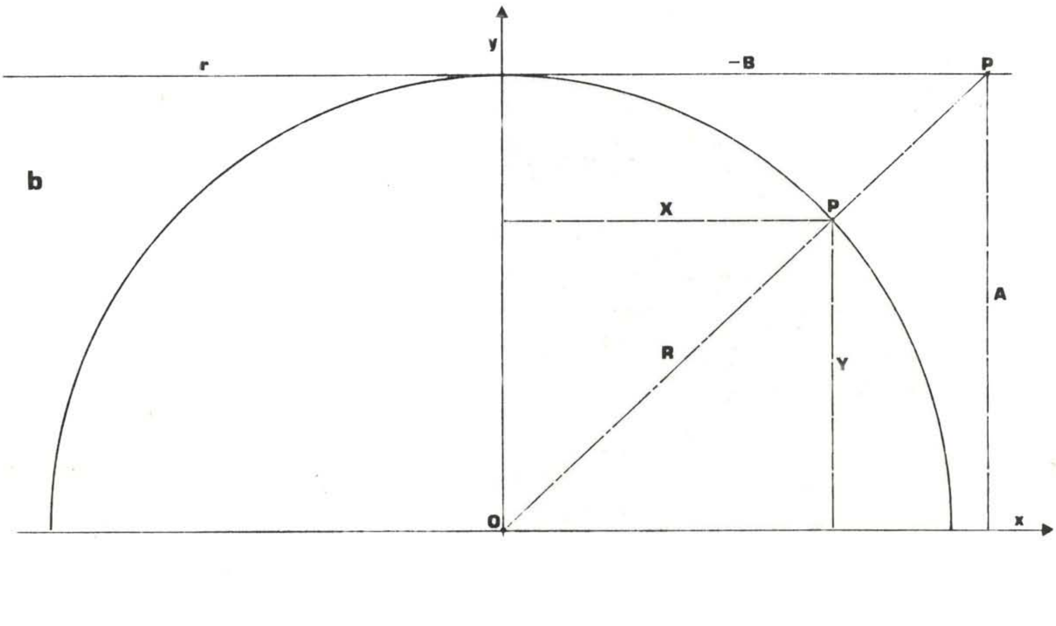
$$Y = A/B \times X \qquad\qquad X^2 + Y^2 = R^2$$

T.14

a



b



Ponendo A= R costante, i valori -B ed A coincidono con le coordinate del generico punto P della retta r parallela all'asse X e tangente la circonferenza; risolvendo il sistema formato dalle due equazioni, si trovano immediatamente le due relazioni che legano, in funzione del raggio R, le coordinate X,Y del punto P' sulla circonferenza con quelle -B ed A del punto P sulla retta tangente:

$$X = + (R^2/(1 + R^2/B^2))^{1/2} \qquad\qquad Y = + (R^2 - X^2)^{1/2}$$

E' chiaro,quindi, quanto sia semplice (soprattutto con l'ausilio di una calcolatrice o di un computer) graduare la centina, la quale, come si chiarirà via via nel seguito, diviene in tal modo nelle applicazioni strumento completo, unico e indispensabile.

Divisione e moltiplicazione di segmento (Tav. 15)

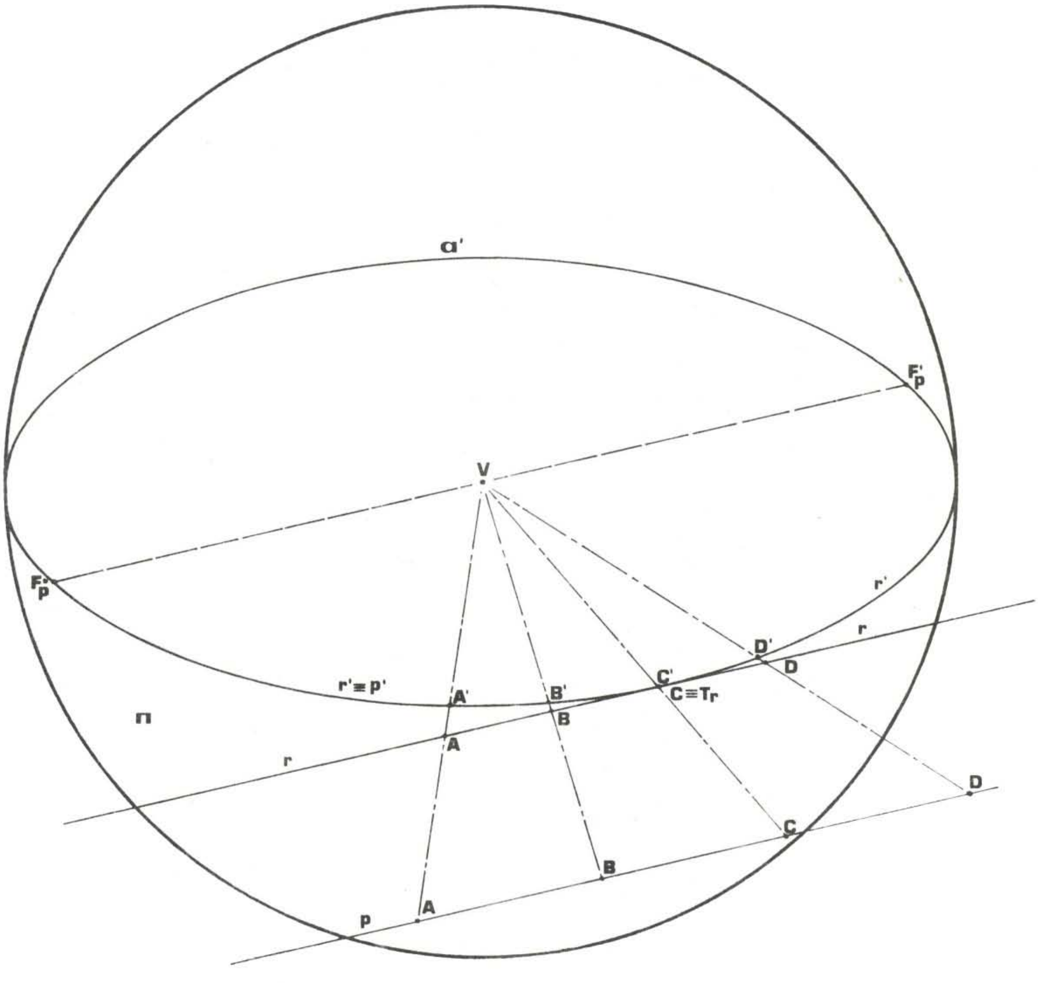
Siano date sul piano α proiettante la generica retta r tangente in Tr la sfera quadro e avente punti di fuga F'r,F"r, nonché la generica parallela p alla r.

Si stacchi sulla semicirconferenza massima r', prospettiva della r e della p, l'arco A'B', prospettiva del segmento AB sulla retta p.

Per moltiplicare o dividere prospetticamente il segmento AB, basta considerare sulla centina, disposta coincidente con la prospettiva r', l'arco A'B', come prospettiva dell'arco AB sulla r: in tal modo, per il parallelismo delle rette r e p, moltiplicando o dividendo il segmento AB sulla r per mezzo della graduazione prospettimetrica della centina, si moltiplica o si divide contemporaneamente il segmento AB sulla p o su qualsiasi altra retta parallela a questa.

Così il segmento AB si triplica prospetticamente in AD, così come AD potrebbe allo stesso modo dividersi in tre parti uguali: ma è chiaro che la centina permette anche, con analogo procedimento, di dividere AD secondo un qualsiasi rapporto proporzionale.

T.15



Tracciamento della prospettiva del punto P sulla retta r secante il quadro (Tav. 16)

Sia nota la prospettiva r' della generica retta r, avente punti di fuga F'r,F''r e secante il quadro sferico nei punti traccia T'r,T''r.

Si voglia riportare su r' la prospettiva P' del punto P di r, posto su di essa a distanza nota da una delle tracce, ad esempio, dalla T'r.

Si disponga idealmente la retta r in (r) per T'r in direzione ortogonale al piano contenente la r'; allo stesso modo si immagini la r- disposta in (r-) per F'r ortogonalmente sempre al piano della r': il generico punto P della r si troverà situato sulla (r) in (P) distante quanto P da T'r, così come (V) sulla (r-) sarà distante quanto V da F'r.

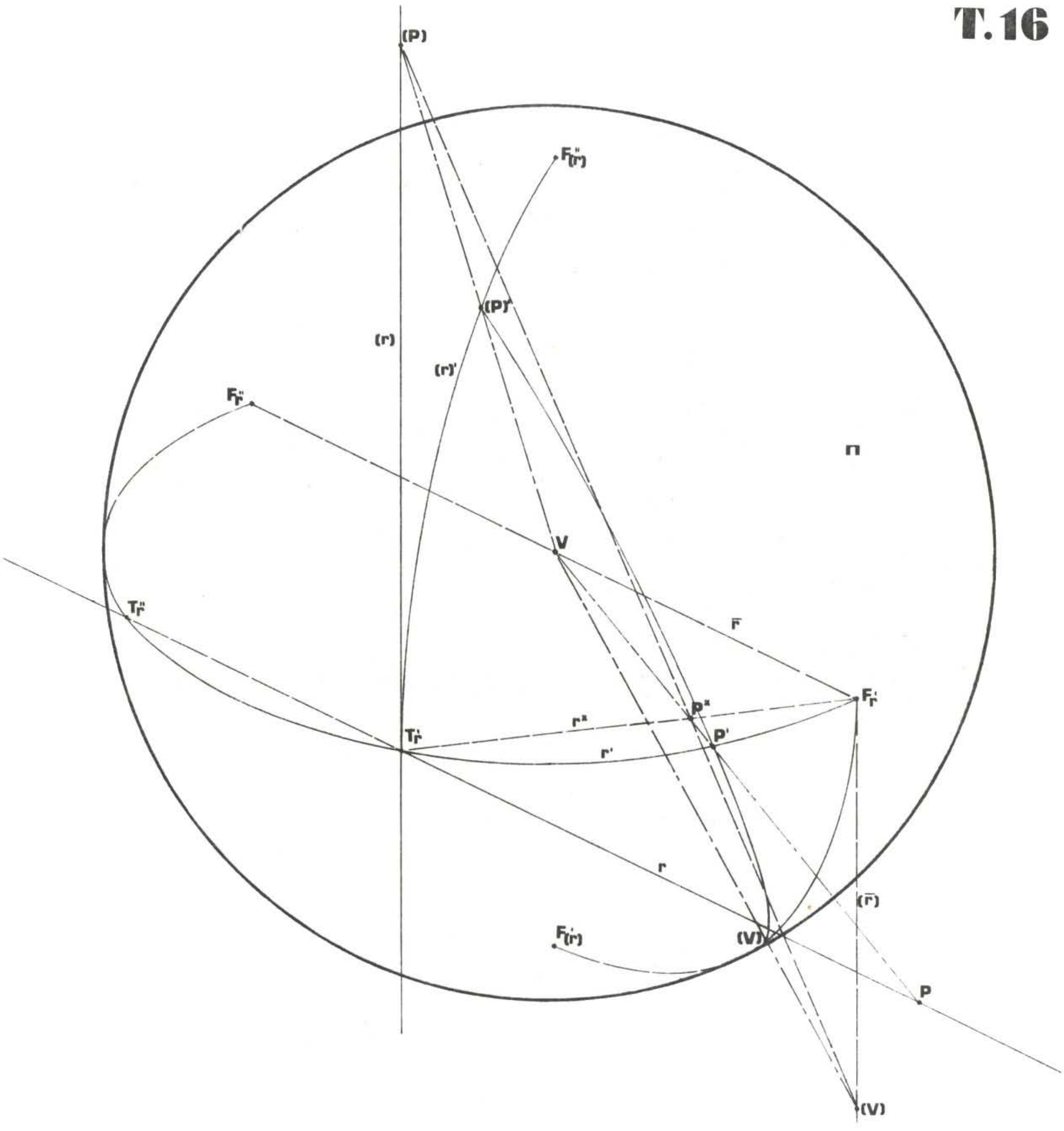
Consideriamo adesso il piano per (r) e (V) come quadro di una prospettiva piana di centro V: la configurazione immaginatasi su di esso fa sì che la retta per (P) e (V) intersechi 1a prospettiva piana r* della retta r in p* prospettiva piana di P.

Proiettando la (r) sul quadro sferico, la (r)' per T'r avrà per punti fuga quelli delle perpendicolari al piano di r', ed essendo la (r) tangente la sfera si potrà, tramite la centina metrica, ricavare subito la prospettiva (P)' di un qualsiasi punto (P) di essa.

Proiettando poi sulla sfera il punto (V), la sua proiezione (V)' si troverà immediatamente sulla circonferenza massima prospettiva della (r-) (avente gli stessi punti di fuga (r)) nel punto medio dell'arco F'r-F'(r), essendo il triangolo V-F'r-(V) isoscele.

La retta per (P) e (V) si proietterà infine nell'arco massimo per (P)' e (V)', arco che inciderà la r' nel punto P' prospettiva del punto P.

T. 16



Angolo fra due rette, fra due piani, fra rette e piano (Tavole 17, 18, 19)

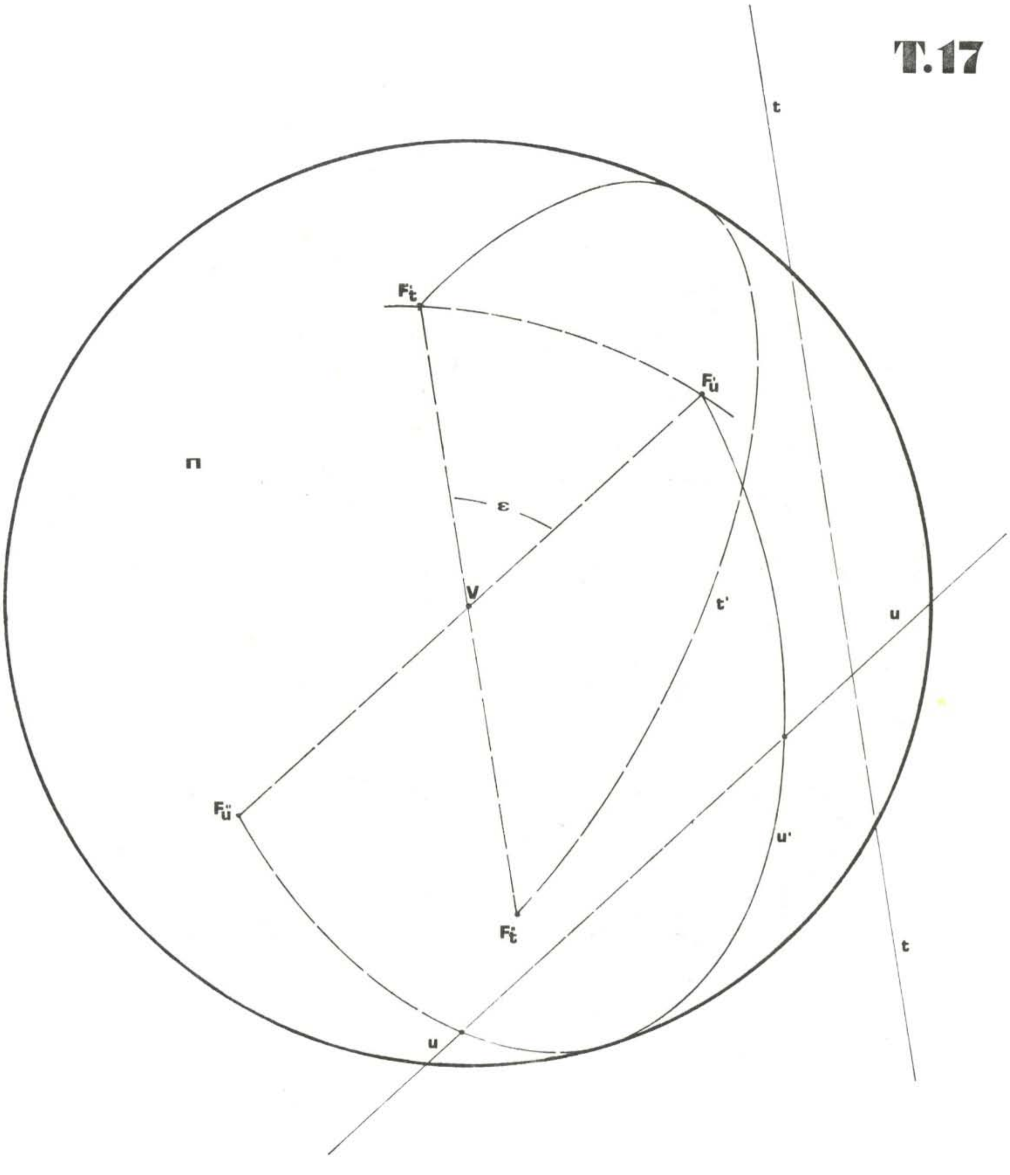
Note le immagini prospettiche t' e u' di due rette, sono note le coppie di punti di fuga F't, F"t ed F'u, F"u, che ne individuano 1e direzioni.

Per misurare gli angoli ε e δ fra le due rette, basta disporre la centina metrica con il punto medio (cioè lo zero della graduazione goniometrica) coincidente con uno dei punti di fuga della retta t, ad esempio F't, e farla passare per un punto di fuga della retta u, ad esempio F'u: l'angolo ε indicato sulla graduazione in corrispondenza a quest'ultimo punto è, evidentemente, uno dei due angoli cercati; l'altro δ è dato dal supplementare di ε (Tav. 17).

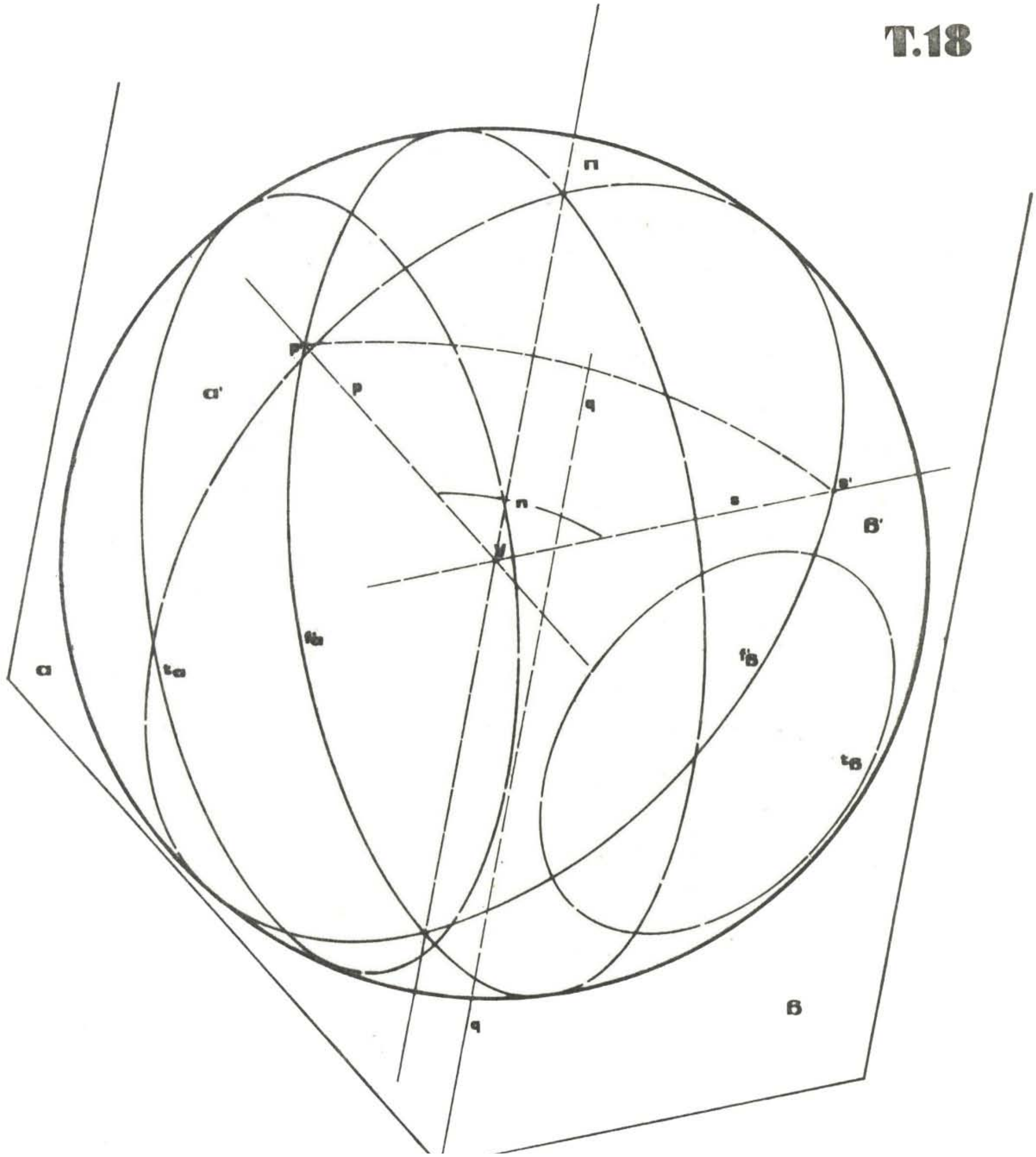
Gli angoli η e μ fra due piani α e β , di cui sono note le circonferenze fughe f 'α ed f 'β , sono uguali agli angoli formati dalle rette proiettanti s e p, appartenenti ai piani proiettanti α– e β– (contenenti f 'α ed f 'β) e perpendicolari alla retta q intersezione dei due piani suddetti (Tav. 18).

L'angolo θ tra una retta t e un piano γ , è fornito dall'angolo minore fra la retta proiettante t-, parallela alla retta t, e la retta q, intersezione del piano proiettante γ- parallelo a γ , col piano ε- proiettante contenente la retta t- e i punti di fuga F'p, F"p delle perpendicolari a γ (Tav. 19).

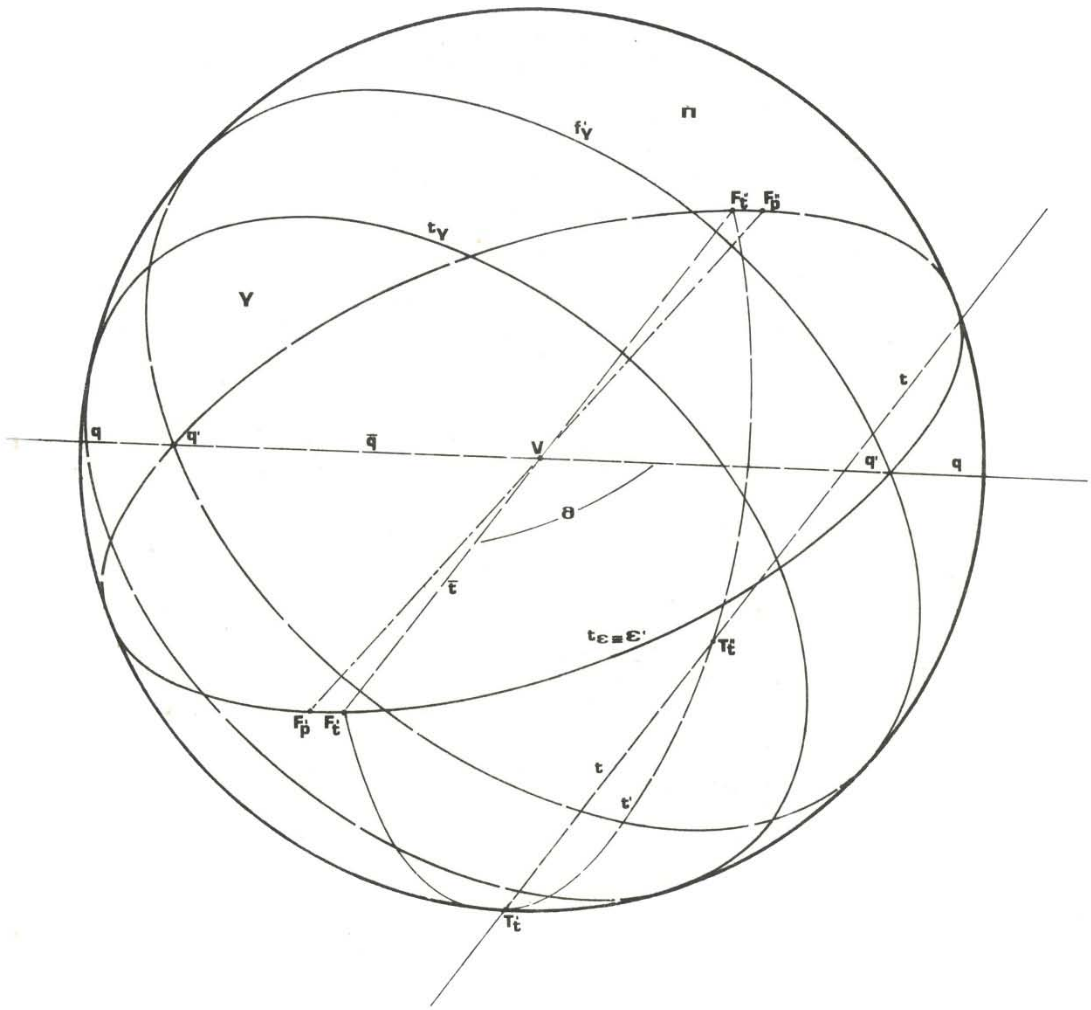
T.17



T.18



T.19



Complanarità di due rette (Tav. 20)

Note le tracce (o la traccia) e le fughe di due rette, si voglia verificare se esse si incontrano in un punto, se cioè esse individuano un piano che le contiene.

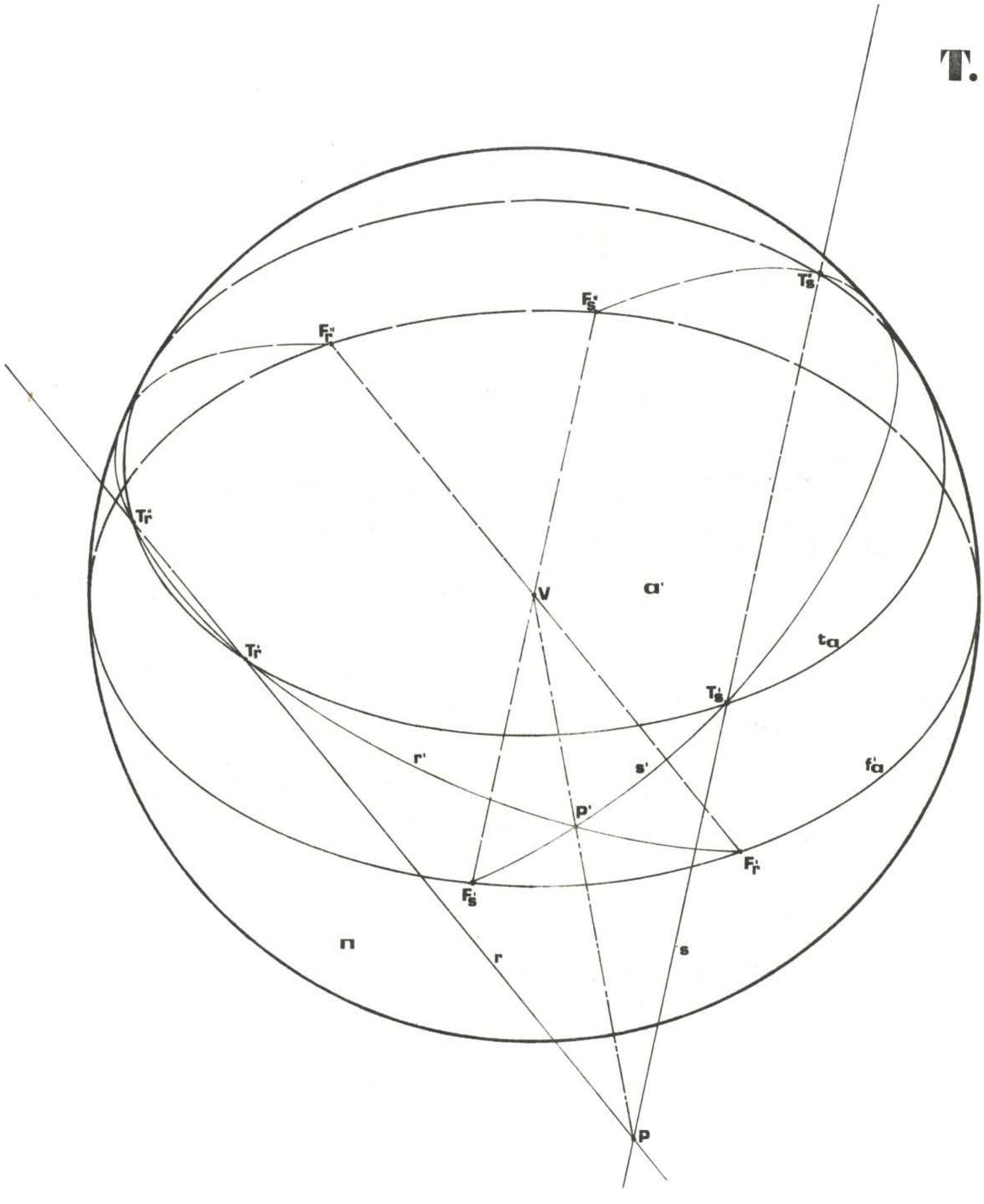
Siano date, ad esempio, la retta r di tracce T'r, T"r e fughe F'r, F"r e la retta s di tracce T's, T"s e fughe F's ed F"s: le due semicirconferenze massime r' ed s', prospettive delle rette r ed s si incontrano nel punto P'.

Se le due rette sono complanari, deve essere possibile il tracciamento di una circonferenza massima contenente i punti di fuga delle due rette ed una circonferenza minore contenente i punti traccia di esse, parallele fra loro, le quali si identificano rispettivamente con la circonferenza fuga f 'α e la circonferenza traccia tα del piano α per r ed s.

Se, dunque, tale circostanza si verifica, come nel caso esaminato, il punto P' è l'immagine prospettica del punto P intersezione delle due rette.

Si badi, infine, che, per verificare il parallelismo della circonferenza per le fughe con quella per le tracce, non è necessario tracciare quest'ultima, ma basta verificare che le tracce (è sufficiente una per ciascuna retta) distino egualmente dalla circonferenza per le fughe.

T. 20



Intersezione di due piani (Tav. 21)

La retta intersezione di due piani contiene ii punto improprio intersezione delle rette improprie dei due piani, cosicché i punti di fuga di essa sono dati dai punti intersezione delle due circonferenze fuga dei piani.

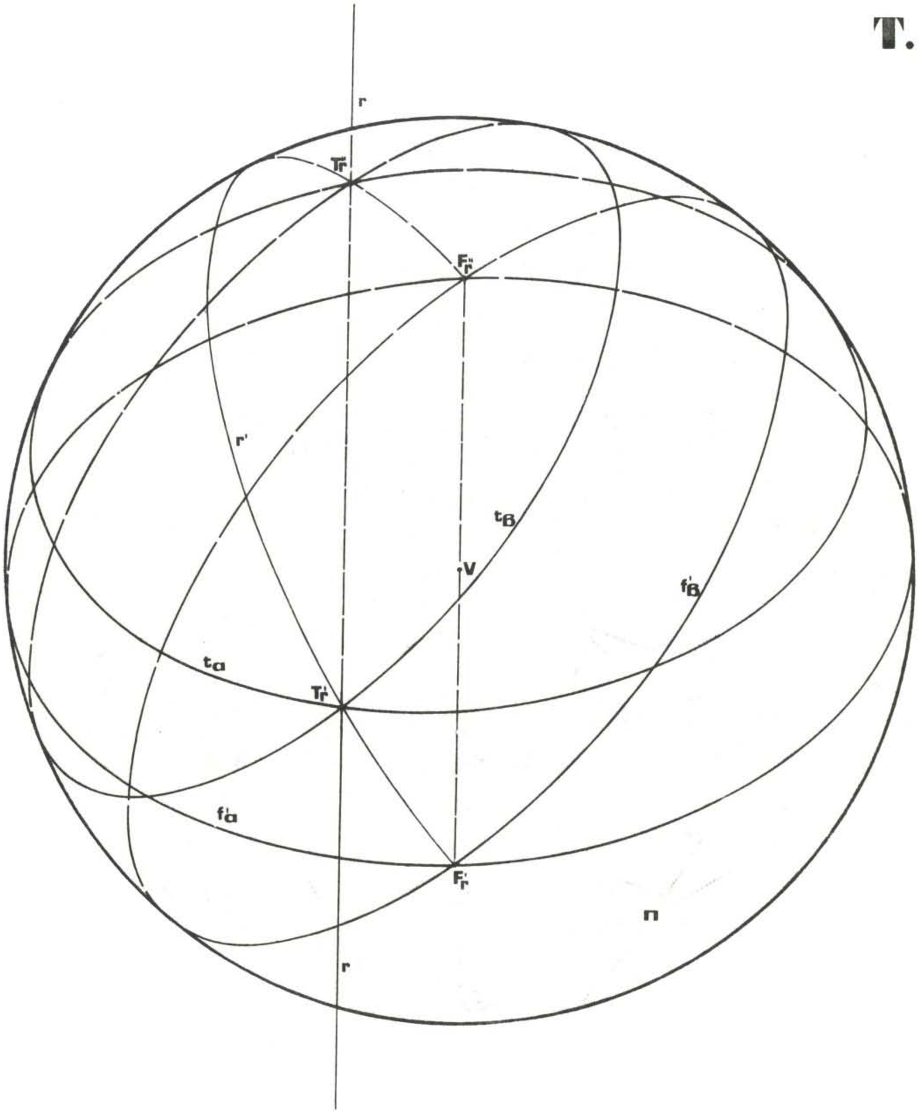
Le tracce della retta, se esistono, sono fornite dai punti comuni alle due circonferenze tracce dei piani.

Così, dati i due piani secanti il quadro α e β di circonferenze fuga $f'\alpha$ ed $f'\beta$ e circonferenze traccia $t\alpha$ e $t\beta$ la retta r, intersezione di essi, ha i punti di fuga F'r ed F"r coincidenti con i punti intersezione della $f'\alpha$ con la $f'\beta$ e i punti traccia T'r e T"r coincidenti con i punti intersezione della $t\alpha$ e $t\beta$.

Tuttavia l'esistenza delle tracce dei due piani non implica, evidentemente, l'esistenza delle tracce della retta intersezione di essi, potendo esistere infinite coppie distinte di piani, aventi sempre due giaciture assegnate, e secanti il quadro secondo circonferenze prive di punti in comune.

E' chiaro, infine, che se le tracce dei due piani si tangono, il punto di tangenza è proprio la traccia della retta intersezione.

T. 21



Intersezione fra retta e piano (Tav. 22)

Siano noti il piano α ($t\alpha$, $t\alpha$) e la retta r, esterna al quadro, avente punti di fuga F'r ed F"r.

La retta r è individuata tramite it punto Q di essa, appartenente alla retta s secante il quadro avente punti di fuga F's, F"s e punti traccia T's, T"s.

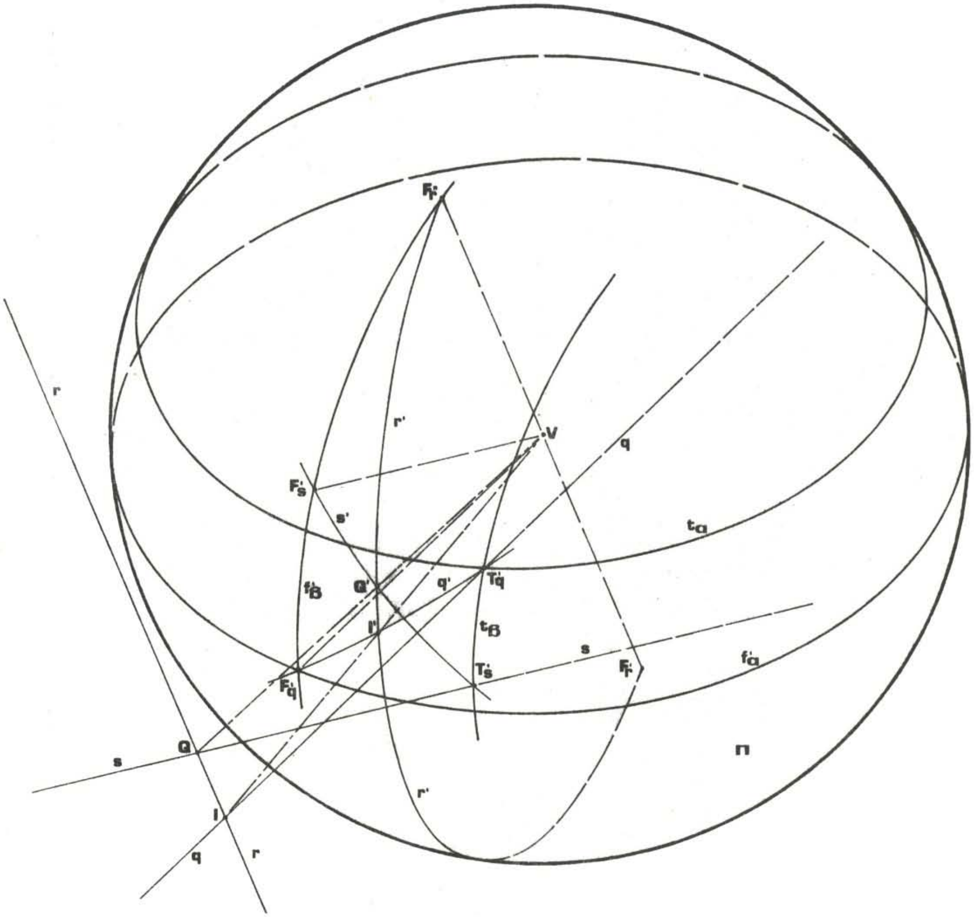
Le rette r ed s appartengono al piano β avente per fuga f 'β , circonferenza massima contenente i quattro punti di fuga di esse, e per traccia la circonferenza tβ , parallela alla f 'β, per le tracce della retta s.

La retta q, intersezione dei piani α e β, ha i punti di fuga F'q ed F"q coincidenti con i punti intersezione delle fughe dei due piani e i punti traccia T'q e T"q coincidenti con i punti intersezione delle tracce di essi.

L'intersezione fra la prospettiva q' della q e la prospettiva r' della r fornisce il punto I', prospettiva del punto I intersezione delle due rette r e q e quindi intersezione pure della retta r col piano α .

Nel caso in cui la retta r non sia esterna, bisogna sempre individuare un piano β non proiettante che la contiene: basta a tal fine considerare una qualsiasi circonferenza massima per i punti di fuga di r quale fuga f 'β di β e la circonferenza parallela alla f 'β per le tracce di r quale traccia tβ .

Noto β si procede come già esposto per la retta r esterna al quadro.



F_r'
r
r'
V
q
F_s'
s'
t_α
f_β'
Q'
q'
T_q'
I'
t_β
s
F_r'
f_α'
T_s'
F_q'
Q
s
Π
r'
I
q
r

Individuazione della retta per due punti (Tav. 23)

Siano dati due punti, siano dati cioè la prospettiva r',(F'r,F''r,T'r,T''r) della retta r contenente il punto P, nonché la prospettiva s' (F's,F''s,T's,T''s) della retta s contenente il punto Q.

Si vogliono trovare la prospettiva q', i punti di fuga F'q,F''q e, se esistono, le tracce della retta q per P e Q.

Si conduca l'arco di circonferenza massima per T's e P': ad esso appartiene la prospettiva t' della retta t per T's e P.

Tale retta individua con la retta r un piano α, di cui è possibile tracciare la circonferenza traccia tα, contenente le tracce delle due rette, e quindi, parallelamente ad essa per i punti di fuga della r, la fuga f 'α.

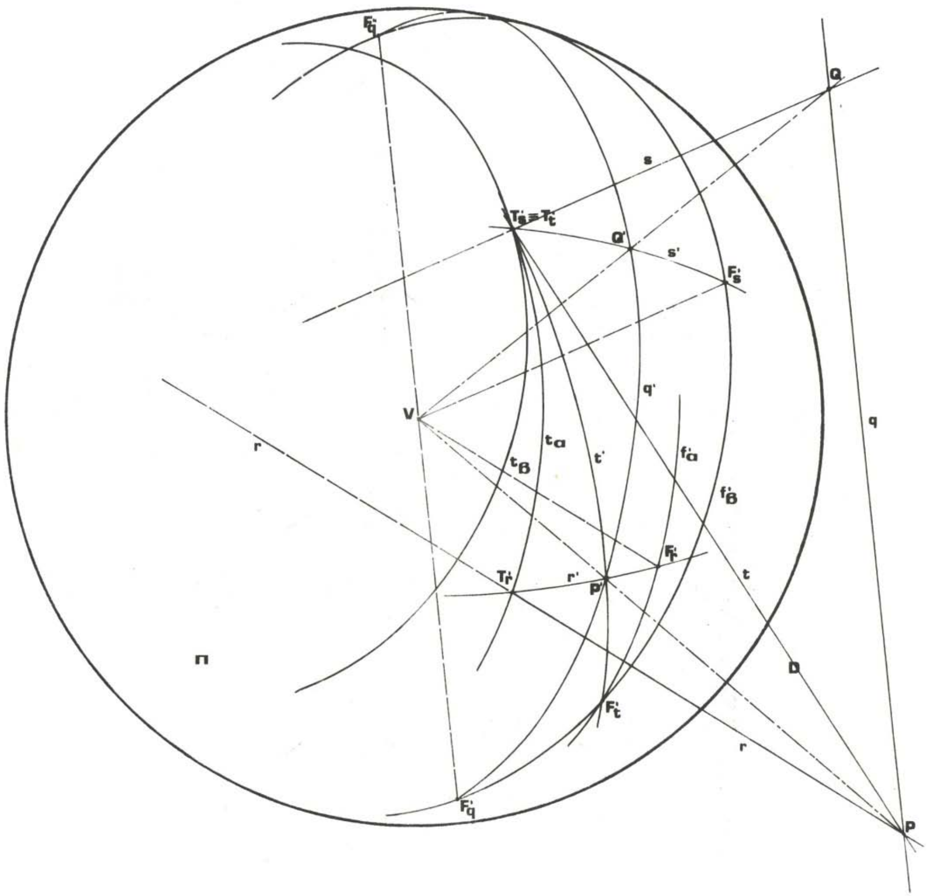
L'intersezione fra la t' e la f 'α fornisce i punti di fuga F't ed F''t della t.

Si osservi adesso che le rette s, t e q appartengono allo stesso piano β di cui si rintraccia la fuga f 'β nella circonferenza massima per F's ed F't e la traccia nella circonferenza minore parallela ad f 'β e passante per la traccia T's.

La retta q ha evidentemente prospettiva appartenente all'arco di circonferenza massima per P' e Q'; i suoi punti di fuga sono i punti intersezione della q' con f 'β, mentre i punti traccia, se esistono, sono i punti intersezione della q' con tβ.

E' chiaro che se la q' non interseca tβ, la q è esterna al quadro.

T.23



F_q'
Q
s
$T_s' \equiv T_t'$
Q'
s'
F_s'
q'
V
q
r
t_α
t'
t_β
f_α'
f_β'
F_r'
T_r'
r'
P'
t
Π
D
F_t'
r
F_q'
P

Individuazione del piano quando ne siano noti un punto e una retta (Tav. 24).

Siano dati il punto P sulla retta s (F's, F"s,T's,T"s) e la retta r (F'r,F"r,T'r, T"r).

Si vogliano tracciare la circonferenza fuga f 'β e la circonferenza traccia tβ del piano β contenente il punto P e la retta r.

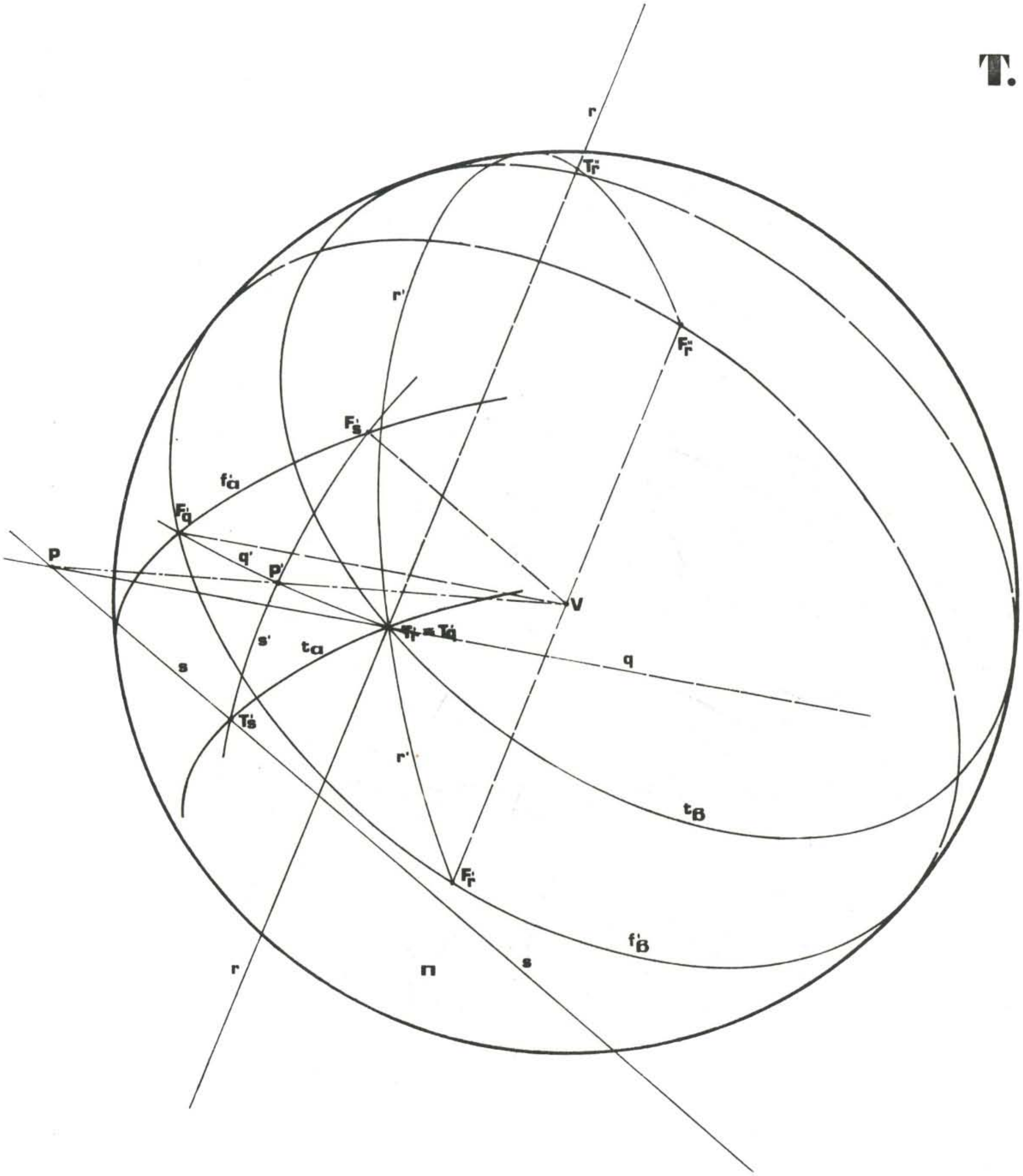
Si mandi la retta q per T'r e P, ovvero si tracci l'arco di circonferenza massima per T'r e P' contenente l'immagine prospettica q' della retta q, che ha dunque la traccia T'q coincidente con la T'r.

Per conoscere il punto di fuga F'q individuiamo la circonferenza fuga f 'α del piano α contenente le rette s e q: f 'α è la circonferenza massima per F's, parallela alla circonferenza tα , traccia del piano α ,contenente le tracce delle rette s e q.

Nota f ' α, è individuata F'q dall'intersezione della circonferenza q' con la fuga f 'α .

Il piano β cercato deve contenere le rette q ed r di cui sono noti gli elementi individuanti: pertanto la circonferenza fuga f 'β sarà data dalla circonferenza massima contenente i punti di fuga F'q ed F'r delle due rette e la circonferenza traccia tβ sarà fornita dalla circonferenza per T'q e T'r necessariamente parallela alla f 'β .

T. 24



r
T_r'
r'
F_r'
F_s'
f_α'
F_q'
p
q'
p'
V
$F_r' \equiv T_q'$
s'
t_α
s
q
T_s'
r'
t_β
F_r'
f_β'
r
Π
s

Individuazione del piano quando ne siano noti un punto e la giacitura (Tav. 25).

Noti il punto P del piano α sulla retta r (F'r,F"r,T'r,T"r) e la prospettiva f 'α della retta impropria appartenente ad esso, si vuole verificare se esso taglia il quadro e individuare, nel caso lo tagli, la circonferenza traccia tα.

Consideriamo, a tal fine, la retta s di α contenente il punto P e appartenente al piano ε proiettante ortogonale ad α .

Essa avrà l'immagine prospettica s' appartenente alla circonferenza massima per P' perpendicolare alla f 'α e punti di fuga F's ed F"s all'intersezione delle due circonferenze suddette.

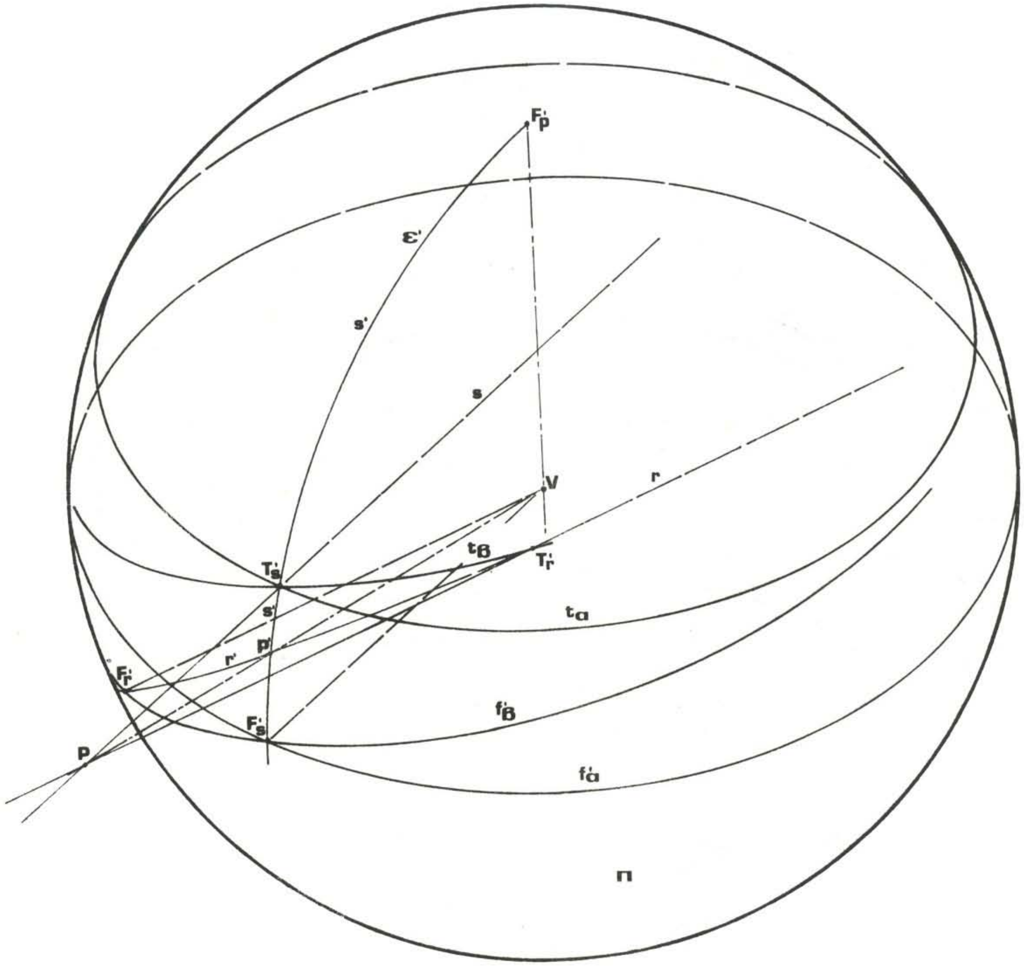
Le tracce (o la traccia) T's e T"s, necessarie alla individuazione della traccia tα del piano α , si otterranno sfruttando la complanarità fra le rette r ed s.

Il piano β contenente le rette r ed s, ha fuga sulla circonferenza massima f 'β, contenente i punti di fuga F'r, F"r, F's, F"s delle due rette, e traccia t'β nella circonferenza parallela alla f 'β, per T'r e T"r.

Se, dunque, la retta s (e quindi il piano α) interseca il quadro, le tracce T's e T"s di essa saranno date dall'intersezione della prospettiva s' con la traccia t'β di β e la traccia cercata tα sarà data, ovviamente, dalla circonferenza per T's e T"s parallela alla f 'α.

Se la s tange ii quadro, appartenendo essa al piano ε proiettante, ortogonale ad α , la sua traccia sarà data da F'p, fuga delle perpendicolari ad α: pertanto la Ts coinciderà, in tal caso, proprio con la traccia tα del piano α tangente il quadro.

T.25



Piede della perpendicolare per un punto ad un piano (Tav. 26).

Siano noti il piano α (f 'α ,t α) e il punto Q sulla retta r (F'r,F"r,T'r,T"r).

Si voglia trovare la rappresentazione della retta p perpendicolare per il punto Q al piano α , nonché il suo piede su α .

L'immagine prospettica della retta p appartiene alla circonferenza massima p', contenente il punto Q' ed i punti di fuga F'p ed F"p delle infinite perpendicolari al piano α , punti che, come si ricorda, sono dati dall'intersezione della retta perpendicolare per V al piano α col quadro sferico.

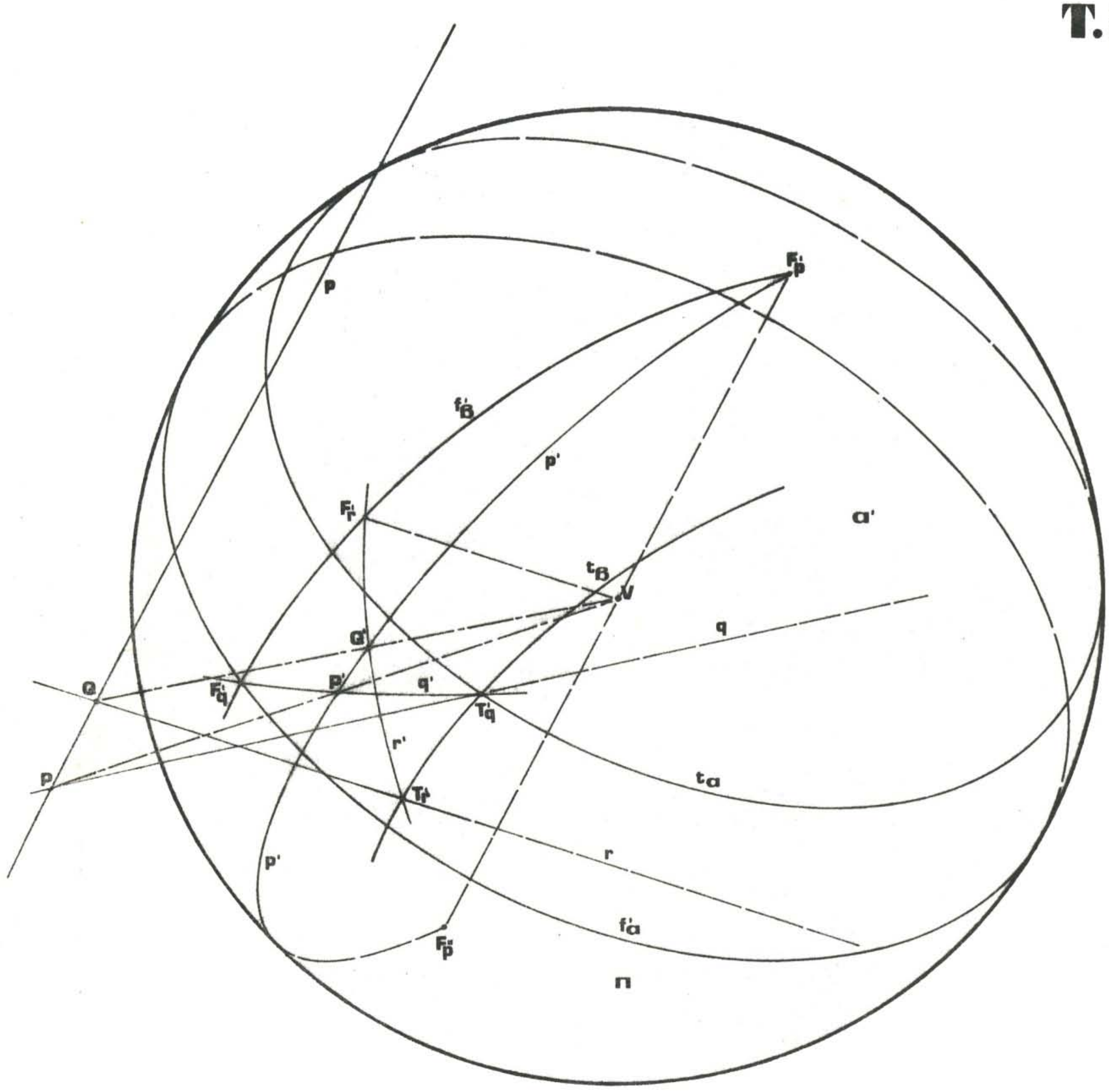
Le rette p ed r individuano un piano β che ha fuga f 'β nella circonferenza massima per F'p ed F'r e traccia tβ nella circonferenza parallela ad f 'β e contenente T'r e T"r.

La retta q, intersezione dei piani α e β , interseca la retta p nel punto P, piede della perpendicolare rispetto ad α .

La prospettiva q' della retta q è immediatamente tracciabile nella semicirconferenza massima contenente i punti F'q ed F"q, intersezione delle fughe f 'α ed f 'β , e i punti T'q, T"q, intersezione delle tracce tα e tβ dei piani α e β.

L'intersezione fra la q' e la p' fornisce il punto P', prospettiva del piede P cercato.

T. 26



Traslazione prospettica di segmento (Tav. 27).

Sia dato il segmento a di estremi A e B sulla retta r (F'r,F"r,T'r,T"r),secante il quadro e giacente sul piano γ (f 'γ ,t γ).

Si voglia trasportare il segmento AB dalla retta r alla retta s, parallela alla r e giacente anch'essa sul piano γ ,in modo che l'estremo A coincida, dopo il trasporto, con il punto c di s.

Si tracci, a tal fine, la circonferenza massima t' per A' e C', prospettiva della retta t per A e C: la t' interseca f 'γ nei punti di fuga F't ed F"t della t, la quale, incidendo la r e la s, appartiene ovviamente al piano γ .

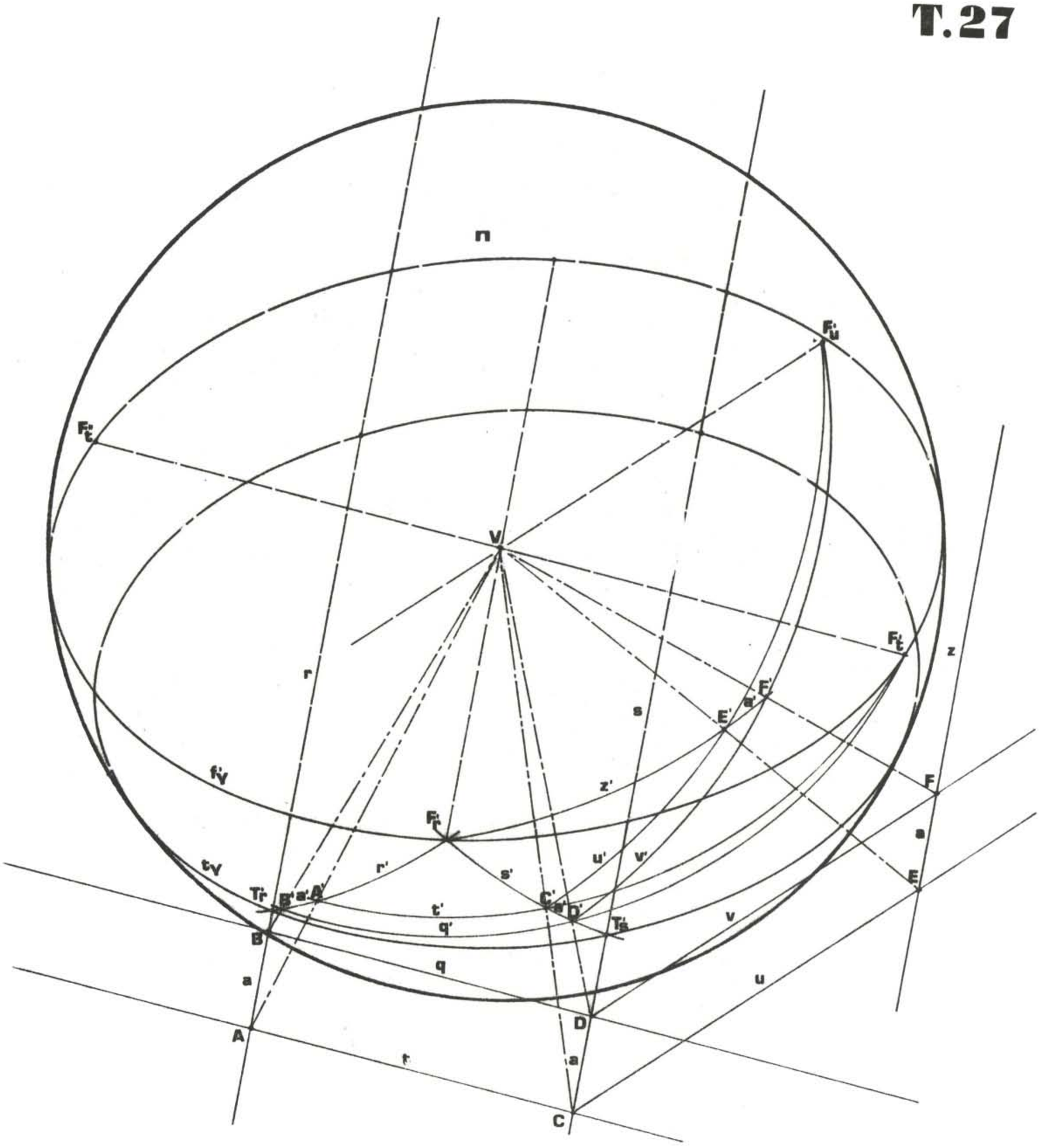
Si può tracciare, a tal punto, per B', F't ed F"t la circonferenza q' prospettiva della retta q di γ parallela per B alla t: l'intersezione della q' con la s' fornisce il punto D', prospettiva del punto D, intersezione della q con la s. L'arco C'D' è dunque la prospettiva richiesta del segmento a sulla s.

Scelto adesso un qualsiasi punto improprio avente, per esempio, prospettiva nei punti F'u ed F"u, trasportiamo secondo questa direzione il segmento CD parallelamente a se stesso.

Anche in questo caso, durante il trasporto, la prospettiva a' di a mantiene gli estremi sulle due circonferenze massime u' e v', prospettive delle rette u e v, parallele per C e D alla direzione prescelta e aventi quindi punti di fuga in F'u ed F"u.

Qualunque circonferenza massima per F'r ed F"r, contenente la prospettiva z' di una retta z parallela ad s, incide le u' e v', le quali staccano sulla z' un arco E'F' prospettiva di un segmento lungo ancora a.

T.27



n
F_u'
F_t'
V
r
s
F_t'
z
E'
a'
F'
f_V'
z'
F
F_t'
a
E
t'V
T_r'
B'
a'
A'
r'
s'
u'
v'
C'
a'
D'
T_s'
t'
q'
v
B
q
a
u
A
D
t
a
C

Distanza di due punti sulla retta (Tav. 28).

Noti due punti P e Q sulla retta r, si voglia conoscere la loro distanza.

A tal fine, se la retta è secante o tangente il quadro sferico, ci si può servire del metodo esposto alla Tav. 16, ottenendo la distanza tra i punti P e Q per differenza fra le distanze che questi hanno dalla traccia di r prescelta.

Se, invece, la retta r è esterna al quadro, occorre aggiungere alcune operazioni che riconducano al metodo suddetto.

Sia individuata, dunque, la retta r tramite il punto all'infinito e il punto P appartenente ad essa (punto P appartenente alla retta nota s secante il quadro).

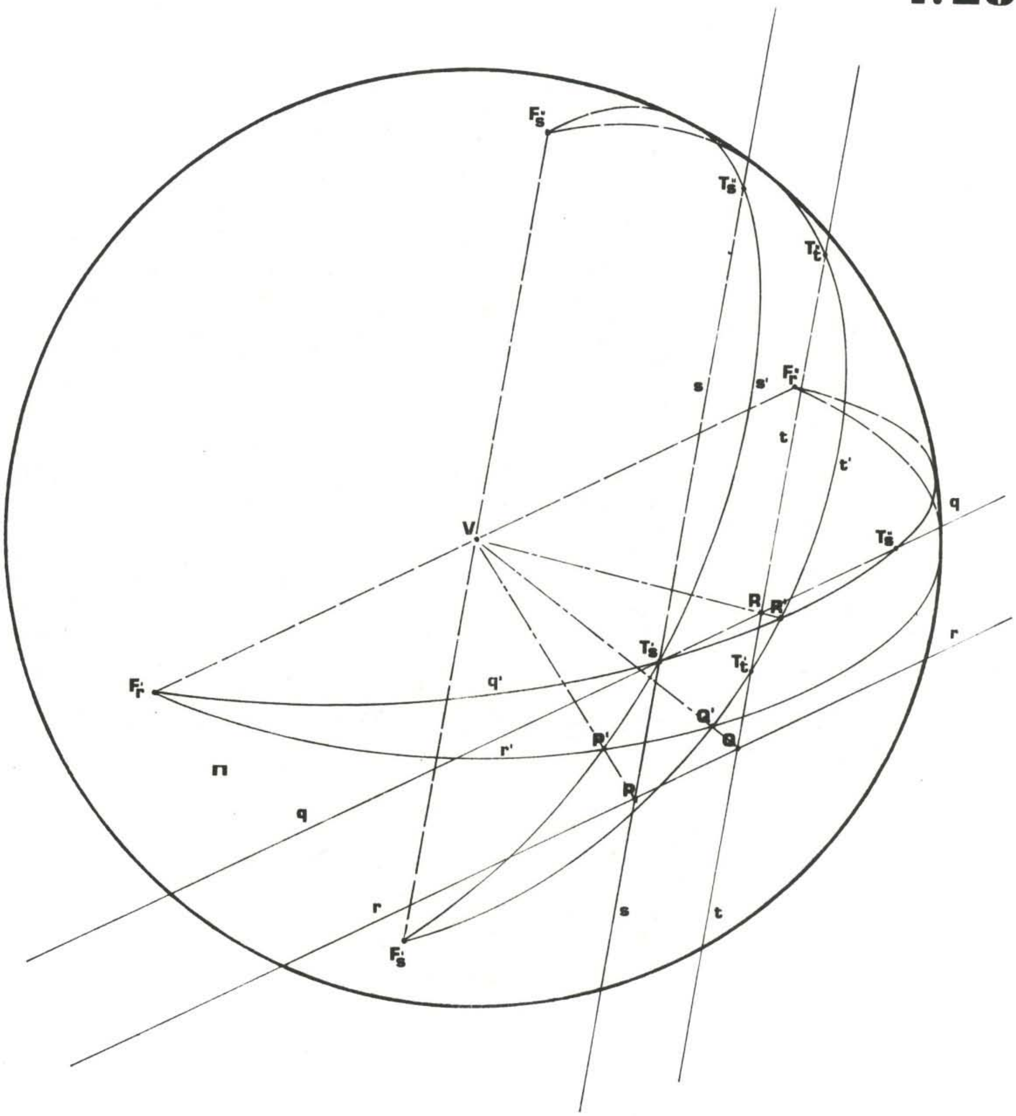
Sulla immagine prospettica r' sia fissato il punto Q', prospettiva del punto Q di r. Si conduca per T's, traccia della retta s, la prospettiva q' della retta q parallela alla r, cioè la semicirconferenza massima per T's e per i punti di fuga F'r ed F"r della r.

Si voglia adesso traslare prospetticamente il segmento PQ sulla q nella direzione della retta s: si voglia cioè traslare nello spazio il segmento mantenendo gli estremi P e Q rispettivamente sulla s e sulla t, parallela alla s per il punto Q, fino a portarlo sulla retta q.

Cosi facendo, il punto P' scorre sulla s' fino a coincidere con T's, mentre il punto Q' scorre sulla t' semicirconferenza massima per Q', F's, F"s, fino a coincidere col punto R' sulla q.

L'arco T's-R' è prospettiva di un segmento uguale a PQ, ma disposto sulla q, retta secante (o tangente) il quadro; e siamo tornati, dunque, al caso precedente.

T. 28



Distanza di due punti (Tav. 29)

Siano dati il punto S sulla retta s (F's,F''s,T's,T''s) e il punto Q sulla retta q (F'q,F''q,T'q,T''q).

Individuiamo la retta r contenente i due punti dati.

A tal fine, tracciamo l'arco di circonferenza massima t' che contiene la prospettiva della retta t parallela per q alla s (nella rappresentazione assonometrica la t e la t' sono coincidenti, essendo il piano proiettante la t ortogonale al quadro: i punti traccia della t si ricavano ricorrendo alla complanarità delle rette t e q.

La fuga f 'β del piano β , per t e q, è fornita dalla circonferenza massima contenente i punti di fuga delle due rette, mentre la traccia tβ è data dalla circonferenza parallela per T'q e T''q alla f 'β .

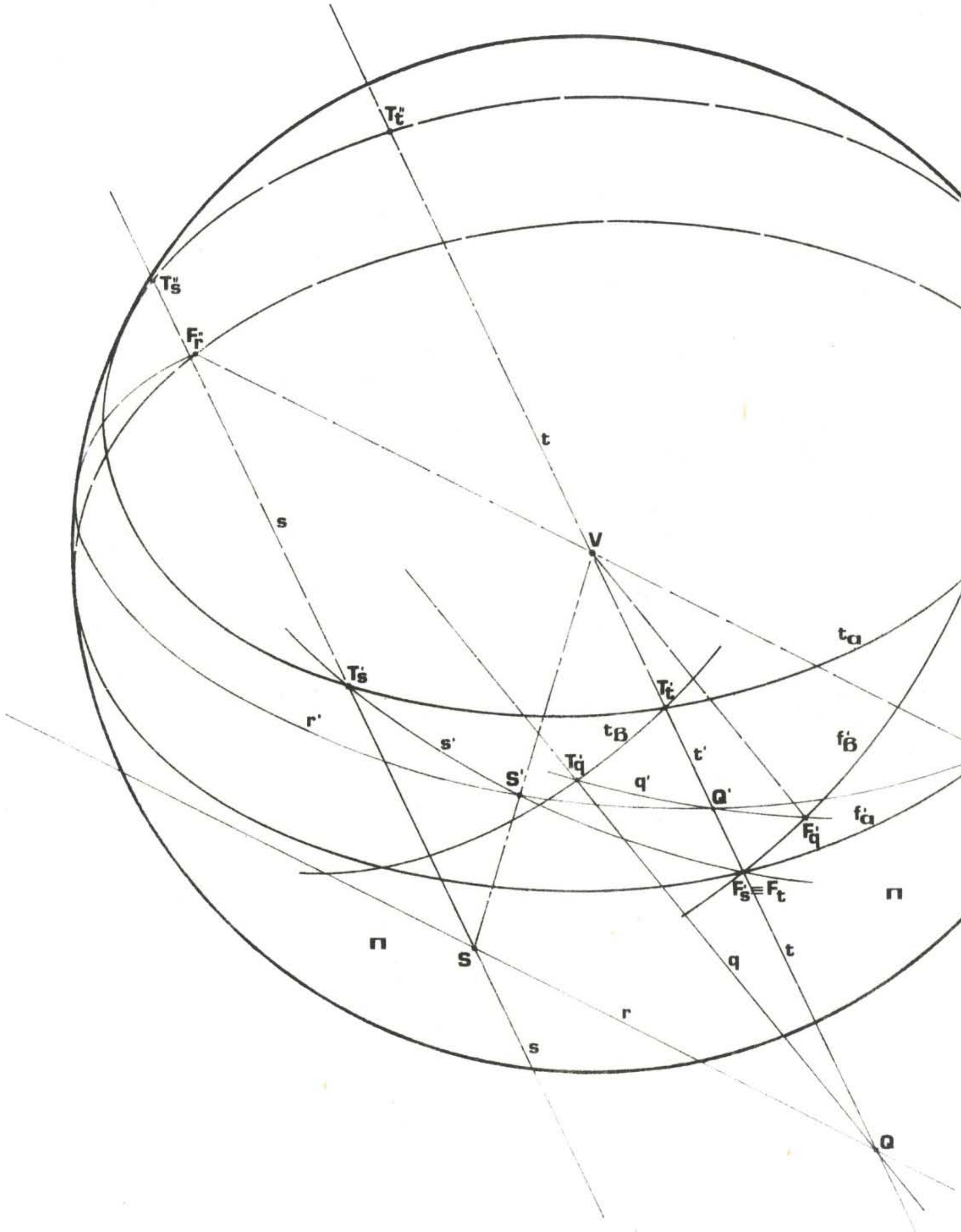
L'intersezione tra tβ e t' dà la coppia di punti traccia T't e T''t della t. Noti tali punti, cioè localizzata la t, è possibile individuare il piano α che contiene la s e la t, piano a cui appartiene pure la retta r cercata.

Il piano α ha, infatti, traccia tα nella circonferenza per i punti traccia delle rette s e t e fuga f 'α nella circonferenza massima parallela alla tα e contenente i punti di fuga comuni delle due rette.

La prospettiva r' della retta r apparterrà all'arco di circonferenza massima per S' e Q': i punti di fuga F'r ed F''r di essa sono forniti dai punti intersezione della r' con la f 'α , mentre i punti traccia di r, se esistono, sono dati dai punti comuni alla r' e alla tα .

In ogni caso, nota r, siamo in grado di poter misurare la distanza S-Q rifacendoci a quanto esposto in precedenza.

T.29


T_t''
T_s''
F_r''
t
s
V
t_α
T_s'
T_t'
t_β
r'
s'
T_q'
S'
q'
t'
Q'
f_β'
F_r'
f_α'
F_q'
$F_s' \equiv F_t$
Π
Π
S
q
t
r
s
Q

Distanza fra due rette parallele (Tav. 30).

Si voglia trovare la distanza fra due rette r ed s parallele, la prima secante il quadro e la seconda esterna ad esso.

La retta r di punti di fuga F'r, F"r ha, dunque, punti traccia T'r,T"r, mentre la s di punti di fuga F's ed F"s è individuata tramite il punto P di essa, punto appartenente alla retta p (F'p,F"p,T'p,T"p).

Si voglia anzitutto ricavare la giacitura del piano γ contenente le due parallele. A tal fine si tracci per T'r e P' la circonferenza massima t', prospettiva della retta t per T'r e P, retta che, insieme alla r, individua il piano γ .

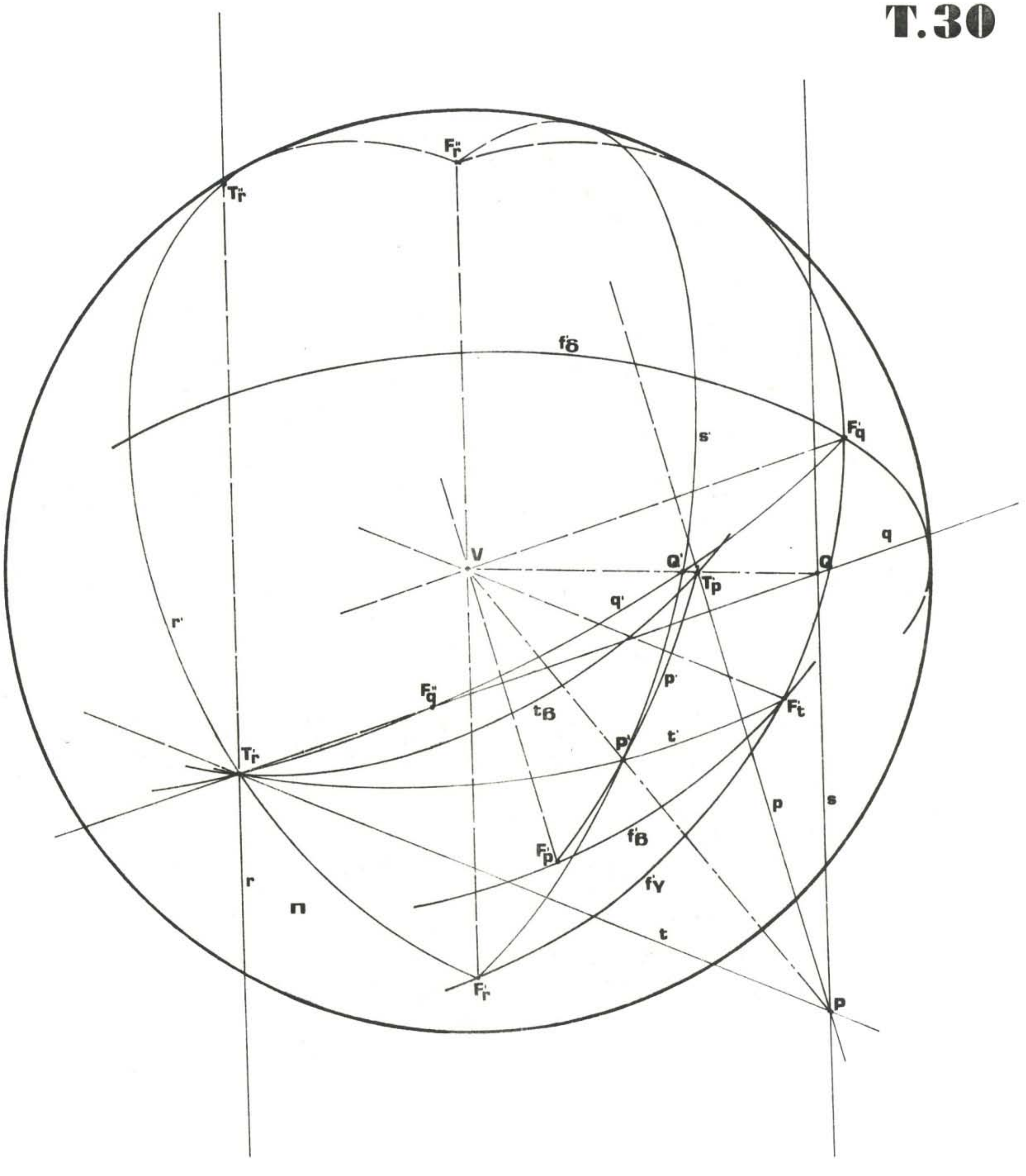
Per trovare i punti di fuga F't ed F"t della t si ricorre alla complanarità tra la t e la p. Il piano β , per t e p, ha traccia nella circonferenza tβ per T'p, T"p, T'r e fuga nella circonferenza massima f 'β parallela per F'p alla tβ, cosicché l'intersezione della t' con la f 'β fornisce i punti di fuga F't, F"t.

Ma basta gia conoscere soltanto F't affinché, insieme ad F'r, sia possibile tracciare per essi la circonferenza massima f 'γ , fuga del piano γ per r e t.

I punti F'q ed F"q, intersezione della f 'γ con la f 'δ, fuga dei piani perpendicolari alla r e alla s, sono i punti di fuga delle infinite rette appartenenti alla giacitura di γ e aventi direzione perpendicolare alle due parallele: per tali punti dovrà pertanto passare anche la circonferenza massima q' per T'r, prospettiva della retta q per T'r perpendicolare alle due rette.

La q' taglia la s' nel punto Q', prospettiva del punto Q di s: la distanza immediatamente misurabile tra T'r e Q è, ovviamente, la distanza cercata fra la r e la s.

T.30



Distanza fra punto e retta (Tav. 31).

Dati la retta r (F'r, F''r, T'r, T''r) secante il quadro e il punto P sulla retta p (F'p,F''p,T'p,T''p), se ne voglia determinare la distanza reciproca.

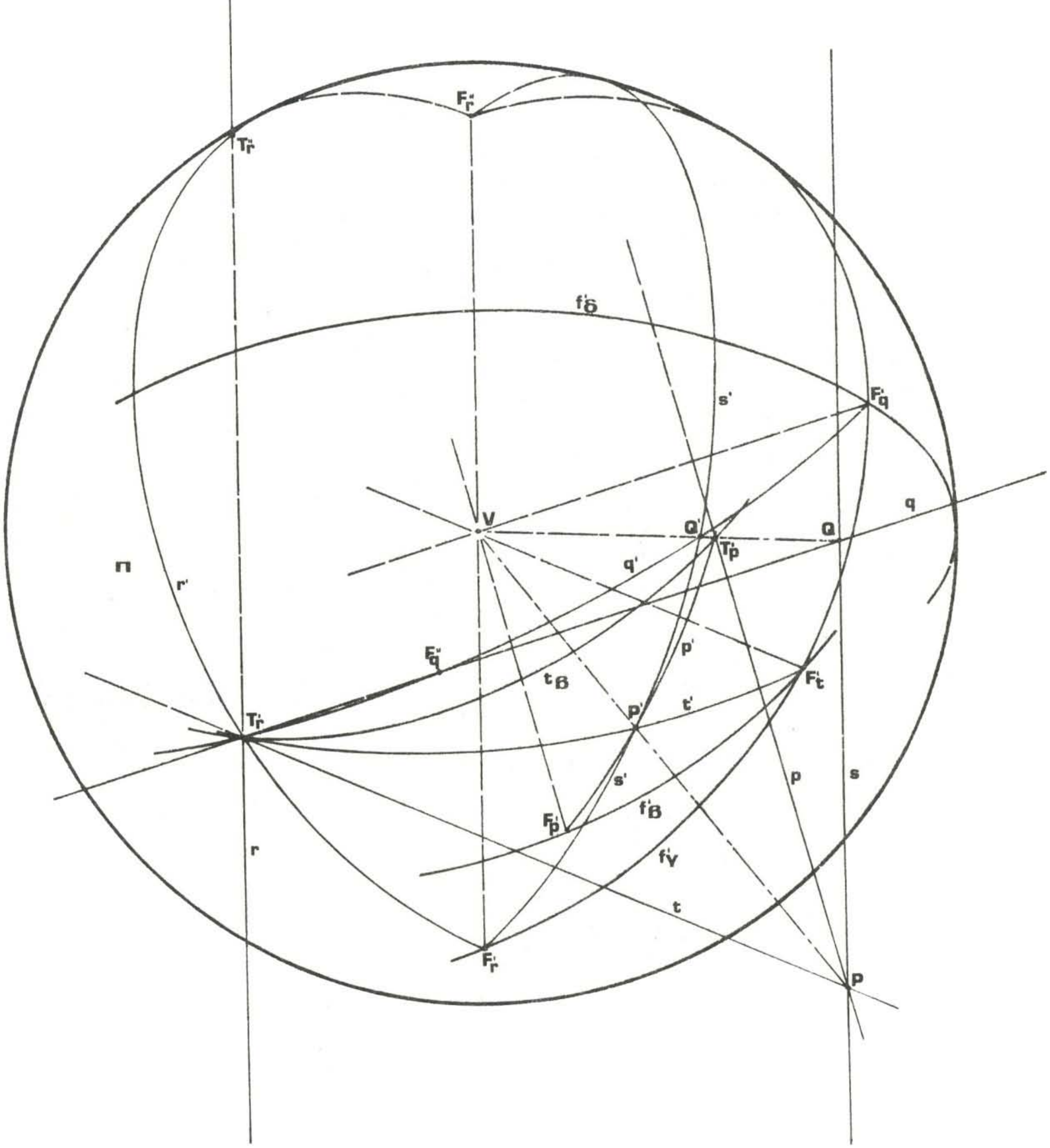
Molto spesso può capitare che la retta per il punto P, su cui si dovrebbe misurare la distanza fra P e la r, sia esterna al quadro.

In tal caso, come si sa, si ricorre, in generale, a operazioni di trasporto di segmento, essendo la distanza fra due punti misurabile soltanto su rette secanti o tangenti il quadro.

Per snellire dunque il procedimento ed evitare operazioni di trasporto conviene, come in questo caso, considerare la retta s parallela per P alla retta r e misurare, ~~secondo quanto~~ già esposto in precedenza, la distanza fra le due rette parallele r ed s (5).

(5) - Si tracci dapprima per T'r e P' la t', quindi la traccia tβ per T'r, T'p e T''p e, parallelamente a questa, la f 'β che, intersecando la t', fornisce i punti di fuga F't, F''t. Si mandi successivamente per F'r ed F't la f 'γ ; l'intersezione fra la f'y e la f'd , fuga dei piani perpendicolari alle rette r ed s, porge i punti di fuga F'q ed F''q. Per tali punti e per T'r deve passare la q', che taglia la s' nel punto Q', prospettiva del punto Q, luogo di incidenza della q secante con la s esterna: la distanza tra T'r e q è la distanza cercata.

T.31



Distanza fra una retta ed un piano ad essa parallelo (Tav. 32).

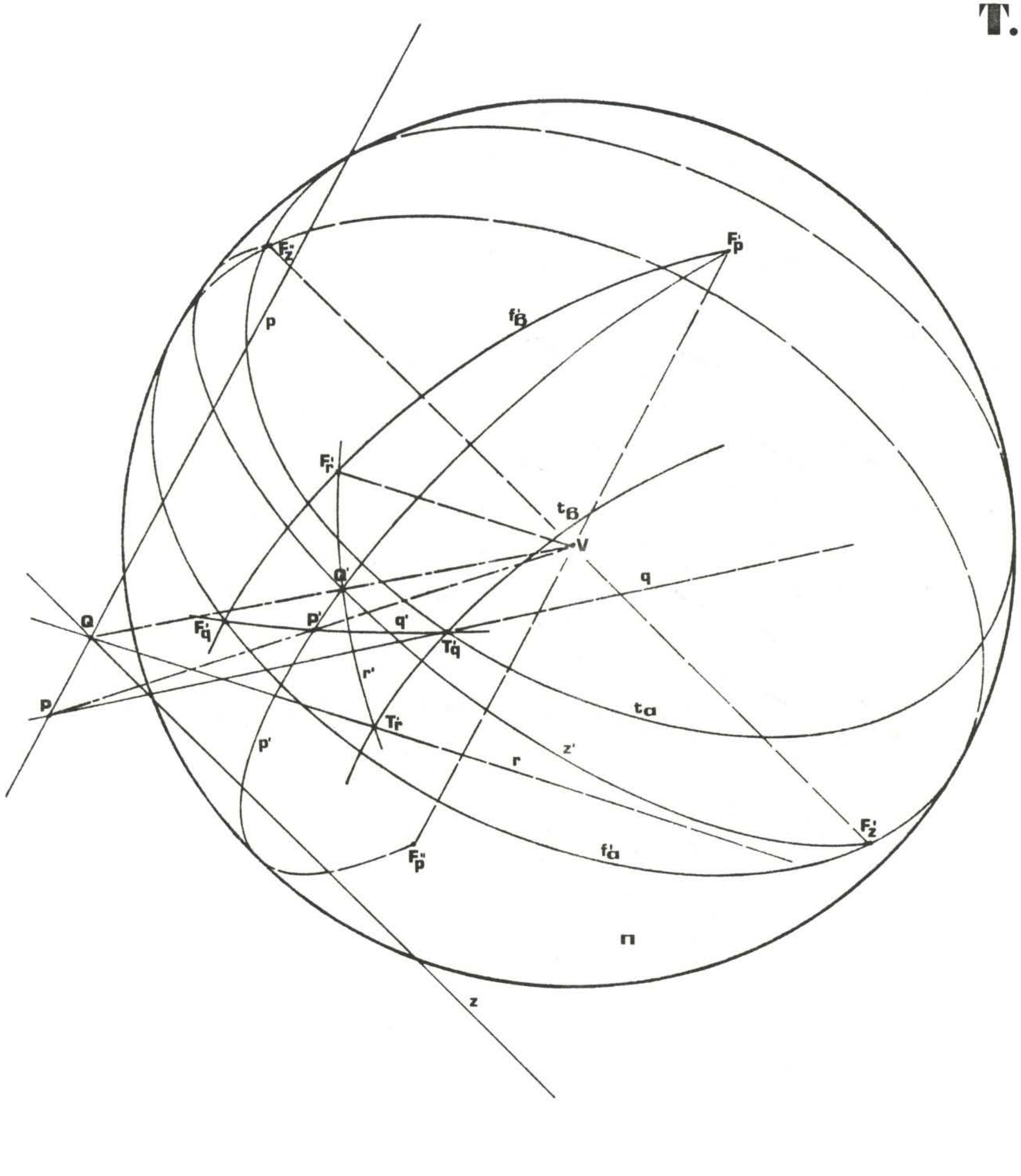
Siano noti il piano α ($f'\alpha$, $t\alpha$) e la retta z parallela ad α ed esterna al quadro, avente punti di fuga F'z, F"z e individuata dal punto Q di essa, punto appartenente alla retta r secante il quadro e avente punti di fuga F'r ed F"r e punti traccia T'r e T"r.

Si invii per il punto Q la retta p perpendicolare al piano α e se ne ricerchi il piede P, seguendo il procedimento già esposto (6).

La distanza fra i punti P e Q, coincide con la distanza fra la retta z e il piano α.

(6) - Tracciata p' per Q', F'p ed F"p, punti di fuga delle perpendicolari ad α, si mandi la $f'\beta$ per F'p ed F'r e, parallelamente ad essa, la $t\beta$ per T'r.
La q', prospettiva della retta q, intersezione di α e β, interseca la p' in P', prospettiva del piede P cercato.

T.32



Distanza fra due rette sghembe (Tav. 33)

Siano note due rette s e z sghembe fra loro, l'una secante il quadro e l'altra esterna ad esso.

La s ha dunque punti di fuga F's, F''s e punti traccia T's,T''s, mentre la z, che ha punti di fuga F'z,F''z, è individuata nello spazio tramite il punto Q appartenente ad essa ed alla retta r (F'r,F''r,T'r,T''r).

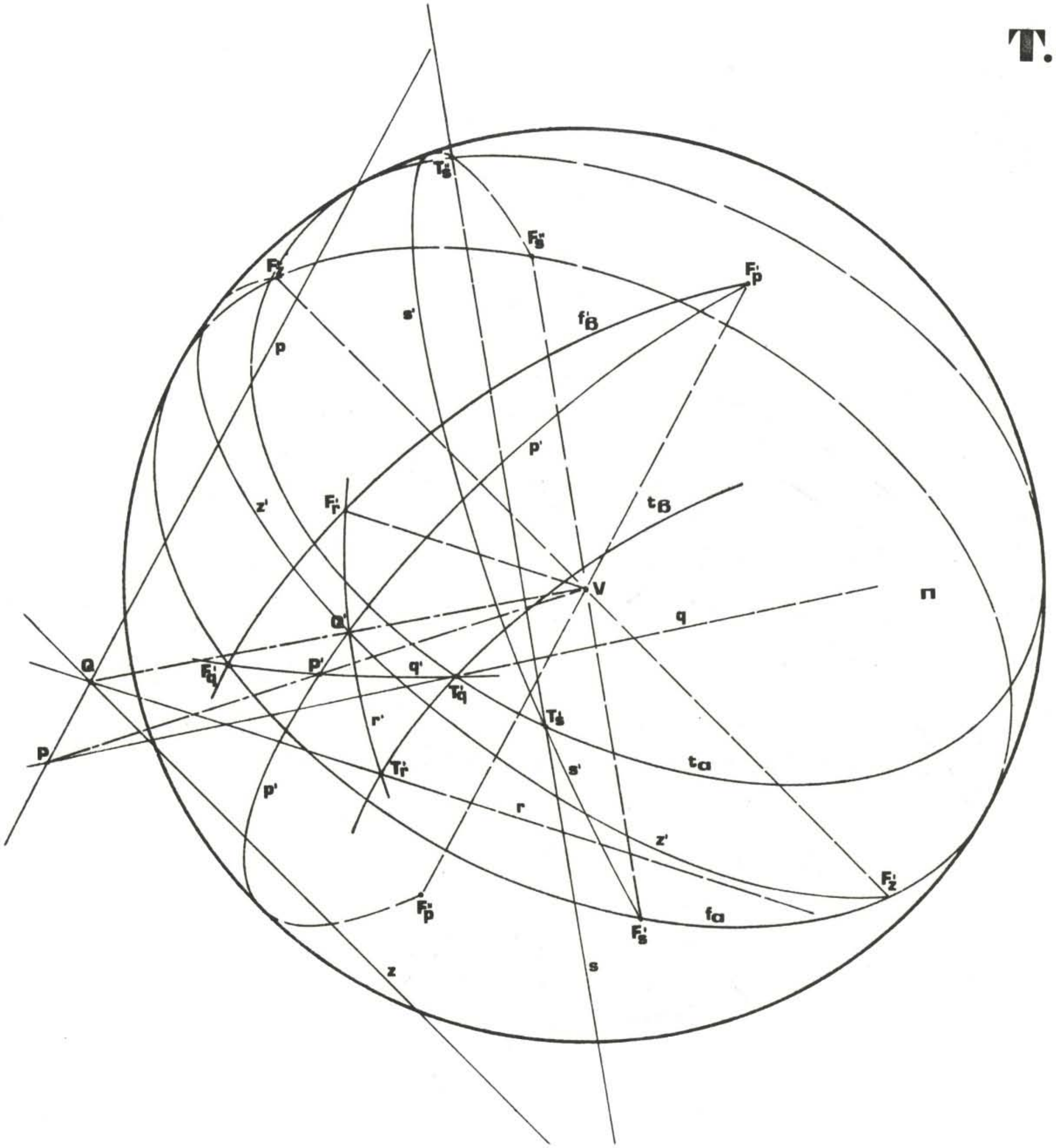
Per potere misurare la distanza fra le due rette z ed s, si consideri i piano α contenente la retta s e parallelo alla z: la distanza fra retta z e il piano α coincide, infatti, con la distanza fra le due rette.

La fuga f 'α del piano α è data dalla circonferenza massima contenente i punti di fuga delle rette s e z, mentre la traccia tα è fornita dalla circonferenza per T's e T''s, parallela alla f 'α .

Noto il piano α , si è in grado di misurarne la distanza dalla retta z, distanza, come si è detto, coincidente con quella cercata (7).

(7 - Tracciata p' per Q', F'p ed F''p punti di fuga delle perpendicolari ad α , si mandi la f 'β per F 'p ed F 'r e parallelamente ad essa la tβ per T 'r.
La q', prospettiva della retta q, intersezione di α a e β , interseca la p' in P', prospettiva del piede P della p rispetto ad α . La distanza fra i punti P e Q coincide con la distanza fra il piano α e la retta z.

T.33



T's
F's
F'z
F'p
s'
f'β
p
p'
z'
F'r
tβ
V
π
Q'
q
Q
F'q
p'
q'
T'q
T's
r'
P
T'r
s'
tα
p'
r
z'
F'z
F'p
F's
fα
z
s

Distanza tra un punto e un piano (Tav. 34).

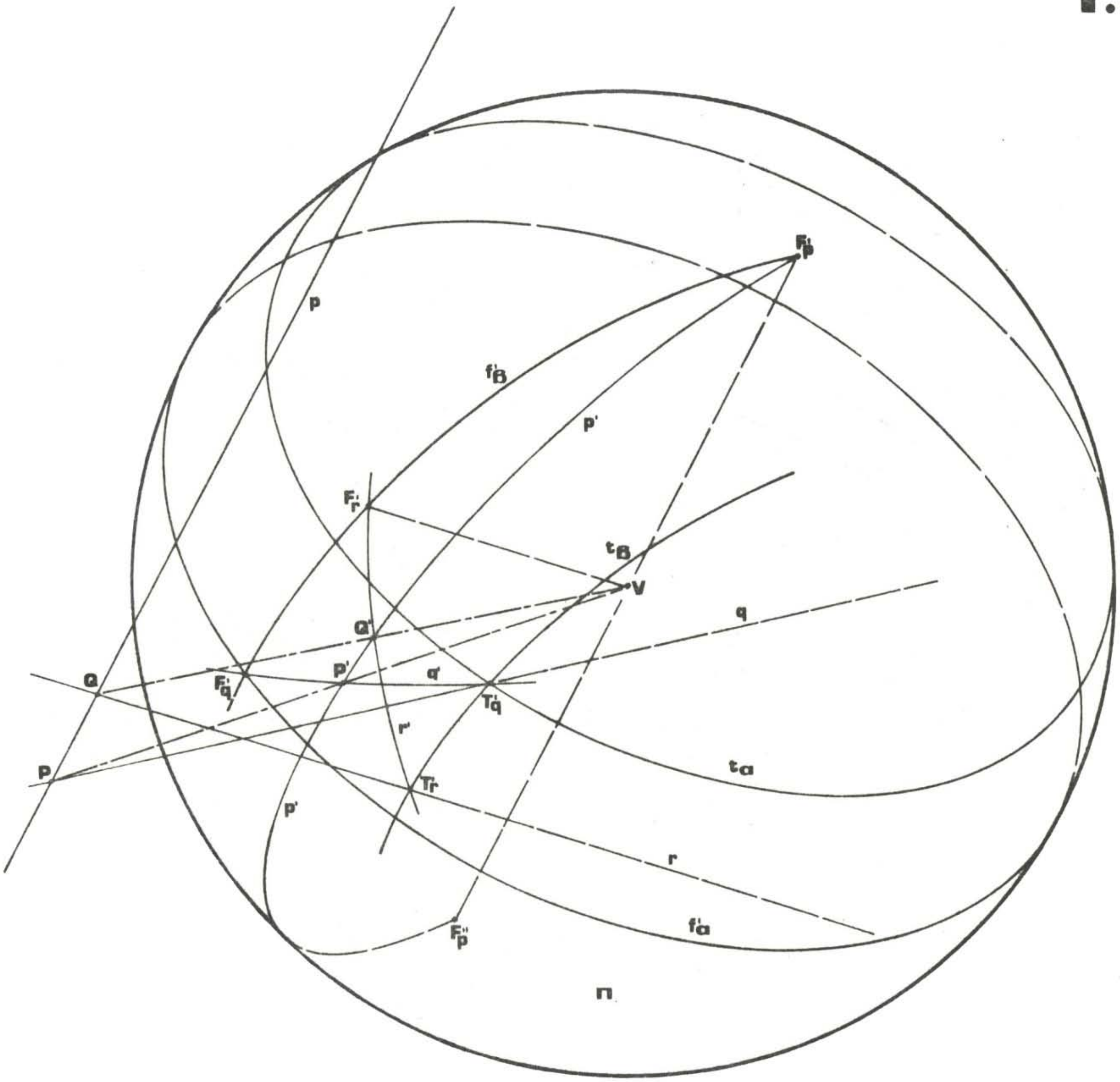
Siano dati il punto Q sulla retta r (F'r,F"r,T'r,T"r) secante il quadro e il piano α (f "α ,t α).

Si invii per il punto Q la retta p, perpendicolare al piano α e se ne ricerchi il piede P seguendo il procedimento già noto (8).

La distanza fra i punti P e Q coincide con la distanza tra il punto Q e il piano α .

(8) - Tracciata p' per Q', F'p ed F"p, punti di fuga delle perpendicolari ad α , si mandi la f 'β per F'p ed F'r e, parallelamente ad essa la tβ per T'r. La q', prospettiva della retta q, intersezione di α e β, interseca la p' in P', prospettiva del piede P cercato.
La distanza fra P e Q coincide con la distanza fra il punto Q e il piano α .

T.34



Distanza fra due piani paralleli (Tav. 35).

Siano dati il piano α (f 'α ,tα) secante il quadro e il piano δ parallelo ad α avente quindi circonferenza fuga f 'α e individuato nello spazio dal punto Q appartenente ad esso e alla retta r (F'r,F"r,T'r,T"r).

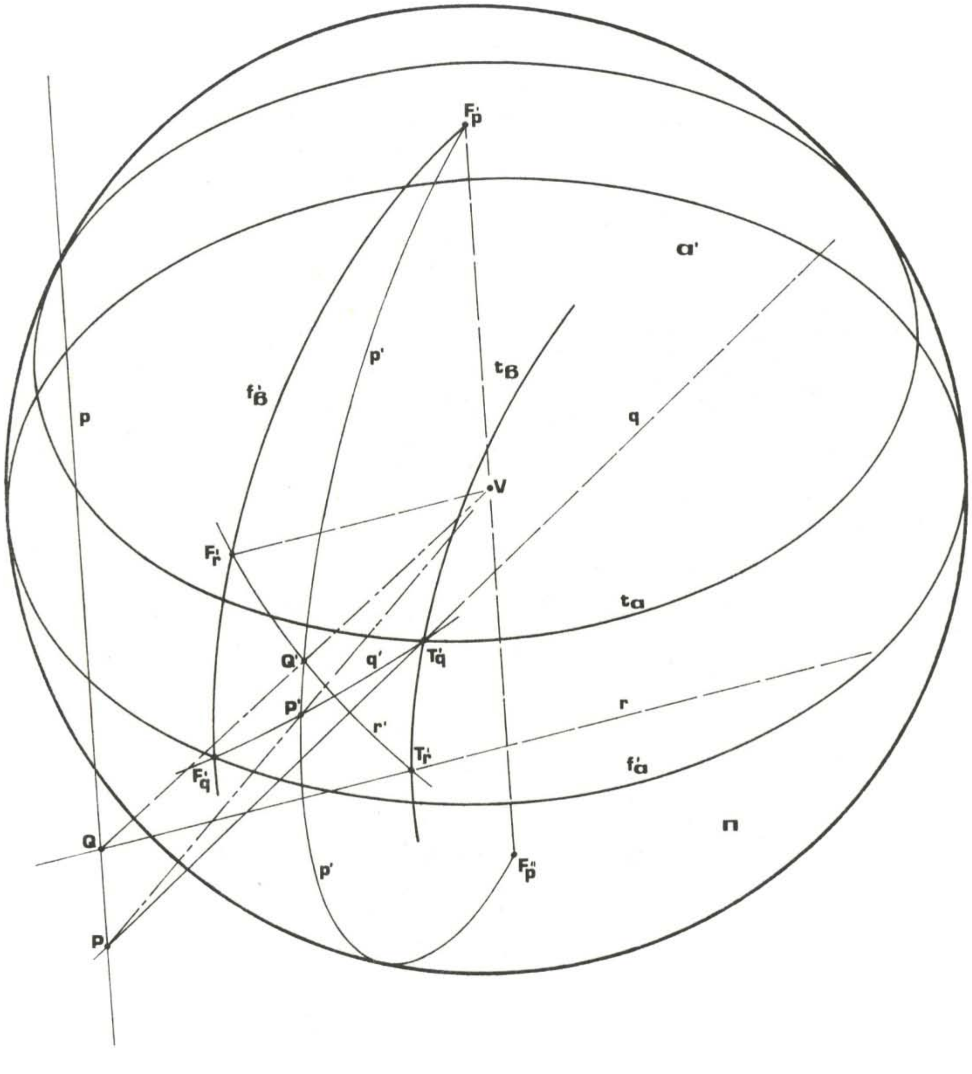
La distanza tra il punto Q di δ e il piano α , ricavata secondo il procedimento già illustrato, coincide con la distanza fra α e δ (9).

---

(9) - Tracciata p' per Q', F'p, F"p, punti di fuga delle perpendicolari ad α , si mandi la f 'β per F'p ed F'r e, parallelamente ad essa, la tβ per T'r. La q', prospettiva della retta q, intersezione di α a e β , interseca la p' in P', prospettiva del piede P della p rispetto ad α .

La distanza fra il punto Q di δ e il punto P coincide con la distanza fra i due piani.

T.35



F'_p
α'
p'
t_β
f'_β
p
q
V
F'_r
t_α
Q'
q'
T'_q
P'
r
r'
T'_r
F'_q
f'_α
Π
Q
F''_p
p'
P

Prospettiva del rettangolato (Tav. 36).

Si tracci la circonferenza fuga f 'δ e la circonferenza traccia tδ del generico piano δ , cui appartiene il rettangolato che si vuole rappresentare.

Si traccino su f 'δ per mezzo della graduazione goniometrica della centina, i punti di fuga prospettiva di due direzioni perpendicolari fra loro e su t δ le tracce di due rette aventi i punti di fuga suddetti.

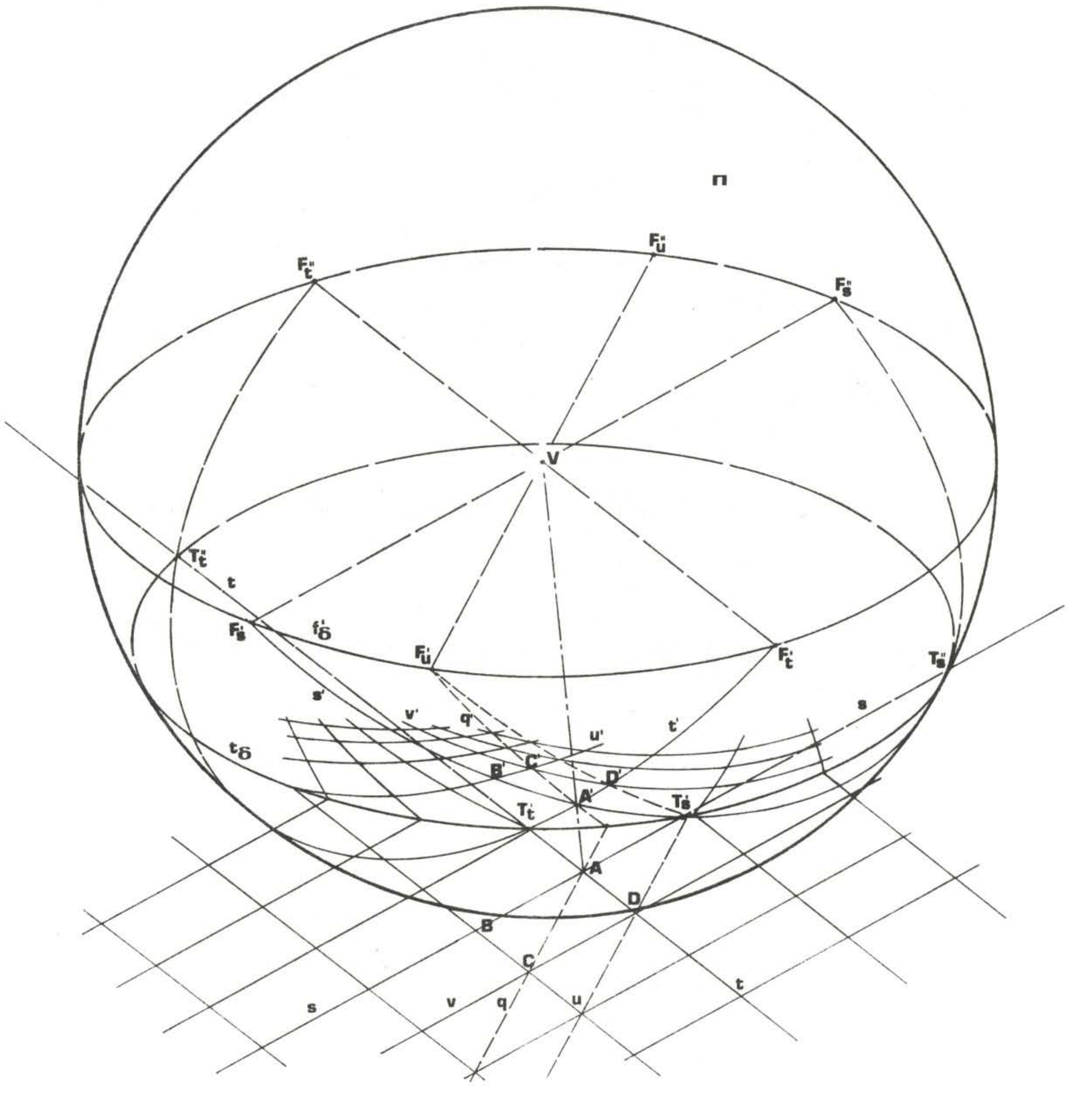
Siano t (F't,F''t,T't,T''t) ed s (F's,F''s,T's,T''s) le due rette perpendicolari di δ . Si riporti, dunque, sulla t', prospettiva della t, l'arco A'B' prospettiva del segmento AB e sulla s', prospettiva della s, l'arco A'D' prospettiva del segmento AD.

Per completare la rappresentazione del rettangolo ABCD occorre tracciare l'arco u', prospettiva della retta u, parallela per B alla t, e l'arco v' prospettiva della retta v, parallela per D alla s.

L'arco di circonferenza massima q' per i punti A'e C' è ovviamente la prospettiva di una diagonale del rettangolo: pertanto l'intersezione della q' con la f 'δ fornisce i punti di fuga di tutte le possibili diagonali del reticolo parallele alla q.

A questo punto, tracciando le prospettive delle diagonali per i vertici B' e D', è possibile ricavare dall'intersezione con le circonferenze già date nuovi vertici e, quindi, nuove diagonali prospettiche fino a tessere, quanto si voglia, la prospettiva del reticolo rettangolare.

T.36



Prospettiva del triangolo equilatero e dell'esagono regolare (Tav. 37).

Siano date la circonferenza fuga f 'δ e la circonferenza traccia tδ del generico piano δ .

Si traccino su f 'δ , usando la graduazione goniometrica della centina**,** i punti di fuga prospettiva di due direzioni formanti sessanta gradi tra loro e su tδ le tracce di una retta secante avente una delle due coppie di punti di fuga già dati.

Sia dunque t la retta secante di α avente punti di fuga F't,F"t e punti traccia T't,T"t e sia F's , F"s l'altra coppia di punti di fuga.

Riportiamo sulla t', circonferenza prospettiva della t, l'arco A'B' prospettiva del lato AB del triangolo equilatero e aggiungiamo sulla f ' δ i punti di fuga F'q , F"q prospettiva della direzione perpendicolare alla retta t.

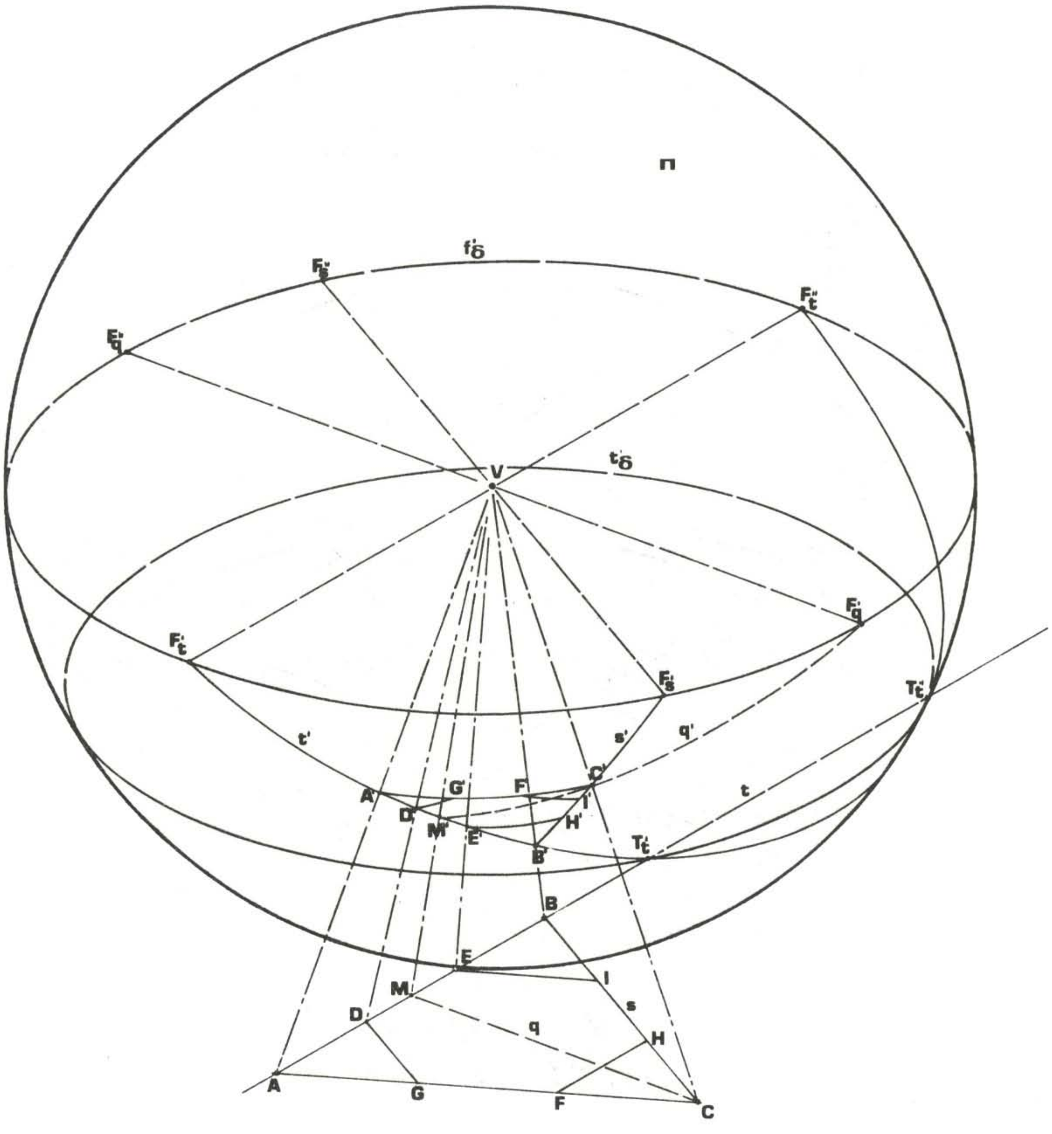
Ricavata la prospettiva M' del punto M medio del lato AB, si tracci per essa l'arco q', prospettiva della retta q fugante in F'q, F"q, e ancora si mandi per B' l'arco s', prospettiva della retta s per B fugante in F's,F"s: l'intersezione fra q' ed s' fornisce il punto C', prospettiva del terzo vertice del triangolo equilatero.

Ovviamente l'arco di circonferenza massima per A' e C' contiene la prospettiva del lato AC e fornisce nell'intersezione con la f 'δ i punti di fuga prospettiva della corrispondente direzione.

Se, adesso, si vuole ricavare dal triangolo equilatero un esagono regolare, basta dividere prospetticamente il segmento AB in tre parti uguali e condurre dai punti D' ed E' trovati, gli archi prospettiva delle rette per D ed E parallele alla s, archi che trisecano prospetticamente nei punti F' e G' il lato AC del triangolo.

Procedendo analogamente a partire dai punti F' e G', si triseca prospetticamente il lato BC ottenendo i sei vertici dell'esagono di cui l'arco di circonferenza massima condotto per i punti E' ed I' conclude la rappresentazione.

T.37



Prospettiva del parallelepipedo (Tav. 38).

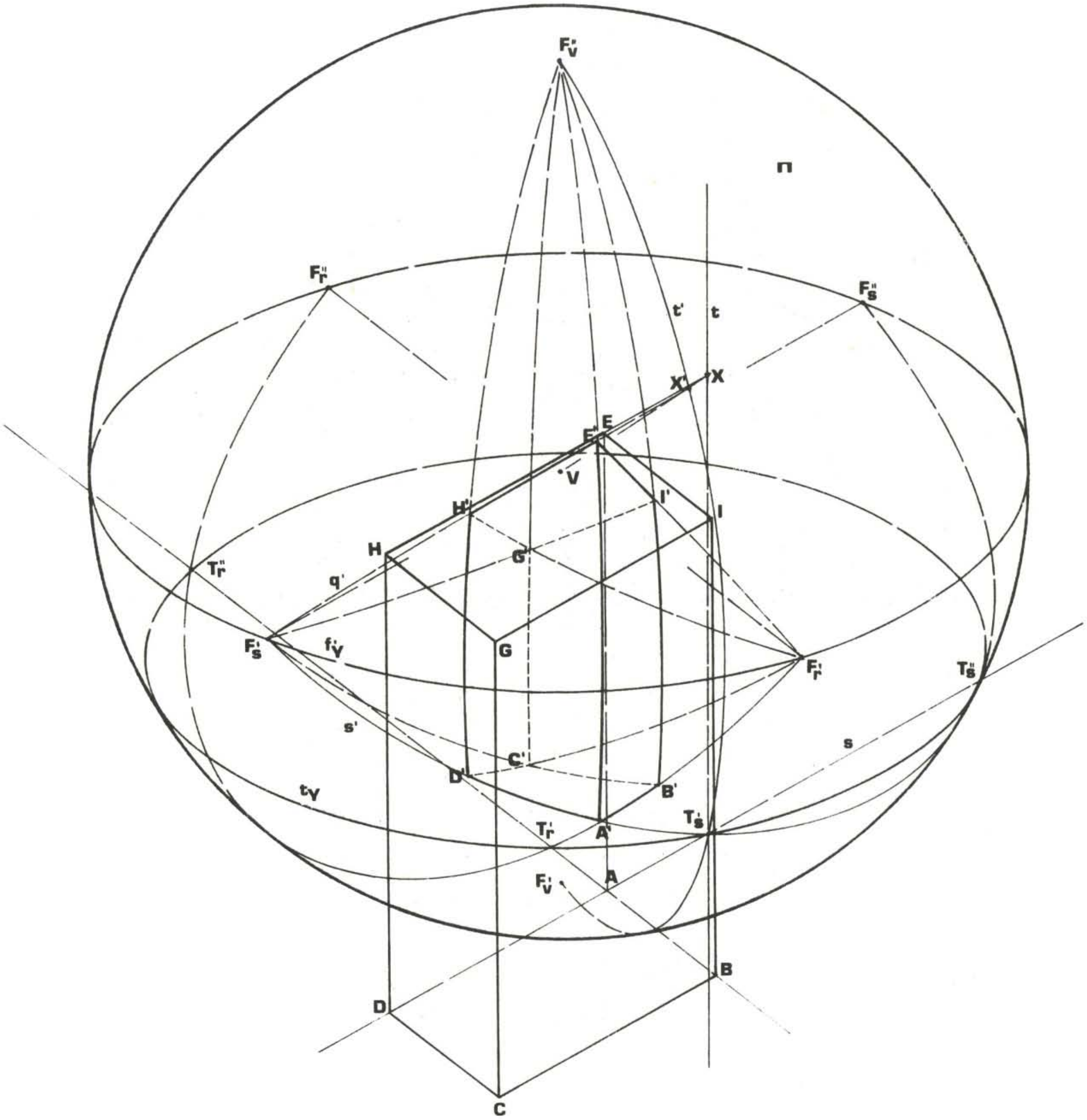
Sul piano γ (f 'γ ,tγ) si sia riportato, seguendo quanto precedentemente illustrato (Tav. 36) la prospettiva A'B'C'D' del generico rettangolo ABCD giacente sul piano γ . Si voglia adesso costruire su tale base un parallelepipedo di altezza prefissata.

Tracciamo allora per T's l'arco di circonferenza t' prospettiva della retta t per T's perpendicolare al piano γ : su t' riportiamo l'altezza T's-X del prisma.

Trasliamo, quindi, prospetticamente l'altezza mantenendo gli estremi del segmento T's-X rispettivamente sulla retta s per T's ed A e sulla parallela q a questa per X: l'arco A'-E' e l'arco T's-X', compresi fra i due archi s' e q', sono allora prospettive di segmenti uguali, appartenenti a rette fuganti in F'v ed F"v, punti di fuga delle perpendicolari al piano γ .

Tracciamo ora per i punti B' C' D' gli archi fuganti sempre in F'v che contengono le prospettive degli altri spigoli del prisma paralleli alla t e mandiamo da E' gli archi di circonferenza massima fuganti in F's ed F'r che contengono le prospettive di due lati della base superiore del prisma e che intersecano gli archi precedenti nei punti H' e I', prospettive dei vertici H ed I.

Basterà allora, per concludere, mandare per questi ultimi due punti gli archi, l'uno per F's e l'altro per F'r cui appartengono le prospettive dei lati HG e GI del prisma, archi che, intersecandosi, forniscono il quarto vertice della base superiore e completano in tutto la prospettiva del prisma.


F''v
Π
F''r
F''s
t'
t
X'
X
E
E'
V
H'
I'
I
H
G'
T''r
q'
F's
f'γ
G
F'r
T''s
s'
s
C'
D'
B'
tγ
T's
T'r
A'
F'v
A
B
D
C

Prospettiva della circonferenza (Tav. 39).

La prospettiva sferica della circonferenza è, in generale, una curva gobba del secondo ordine, simmetrica rispetto a due piani proiettanti mutuamente ortogonali, curva che potrebbe denominarsi come "ellisse sferica", essendo una delle due curve uguali luogo dei punti intersezione del cono quadrico,di direttrice ortogonale all'asse non circolare, con la sfera.

Fa eccezione il caso in cui la direttrice ortogonale all'asse nel cono proiettante la circonferenza c è una circonferenza, ovvero il caso in cui la circonferenza c appartiene ad un piano proiettante: nella prima configurazione la prospettiva è una circonferenza, nella seconda un arco di circonferenza massima.

Sia data la giacitura di un generico piano α, sia nota, cioè, sul quadro la circonferenza fuga f 'α di α .

Siano fornite ancora le prospettive O' del centro O e d' del diametro d di una circonferenza giacente sul generico piano α .(E' chiaro che al variare del piano α , mantenendosi la stessa giacitura, varia la reale dimensione della circonferenza c su α).

La prospettiva d' giace sulla circonferenza massima p', prospettiva della retta p di α , retta che ha i punti di fuga in F'p ed F"p su f 'α.

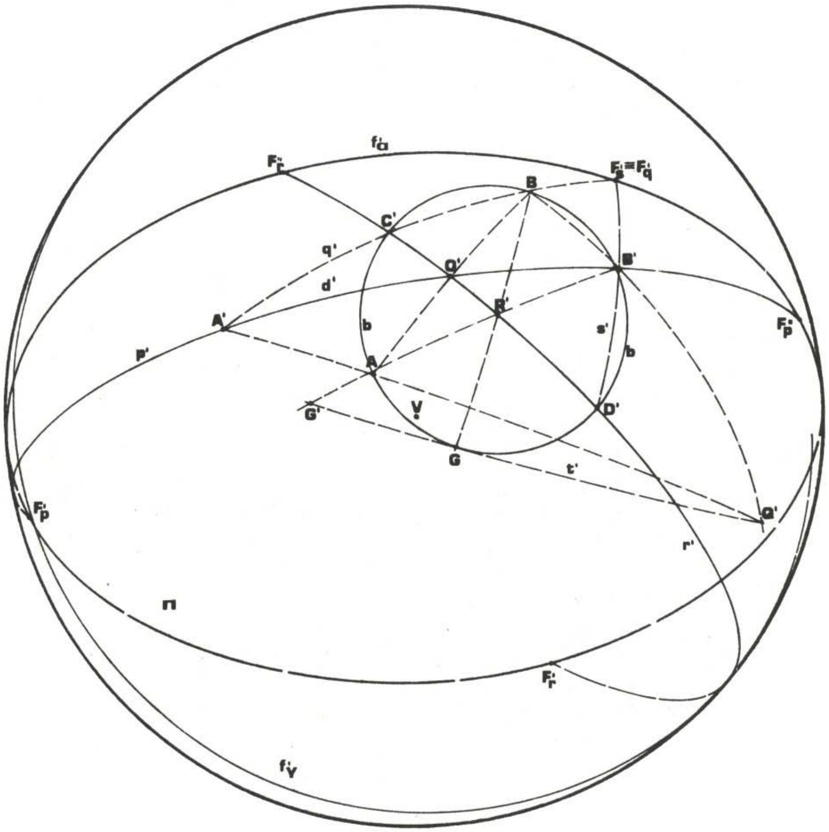
Si traccino sulla f 'α la prospettiva r' della retta r di α , perpendicolare per il punto O alla retta p, e successivamente le prospettive q' ed s' delle rette q ed s di α formanti angolo di quarantacinque gradi con la retta p e condotte rispettivamente per i punti A e B, estremi del diametro d.

I punti intersezione C' e D' delle circonferenze q' ed s' con la r' sono le prospettive degli estremi del diametro, della circonferenza c, perpendicolare alla retta r.

Tracciamo adesso la circonferenza b avente diametro nel segmento C'D': essa è la traccia di un piano γ secante la sfera.

Se il piano γ fosse assunto come quadro di una prospettiva di centro V, i due diametri AB e CD della circonferenza c fornirebbero come proiezione prospettica su di esso due corde dell'ellisse prospettica e la circonferenza b allora potrebbe assumersi come omologa della ellisse c': alla corda A'B', incidente in O' l'asse di omologia per C' e D', corrisponderebbe sulla circonferenza b la corda AB, perpendicolare per O' all'asse, e il centro di omologia sarebbe fornito dal punto intersezione delle due rette congiungenti le coppie omologhe AA' e BB' (10).

T.39



Se quindi immaginiamo di proiettare la costruzione omologica dal piano γ sulla sfera π , possiamo istituire un'omologia "sferica" tra la circonferenza b e la curva gobba prospettiva della circonferenza c. Tale omologia ha "asse" nella r' e centro nel punto Q' prospettiva del centro proprio dell'omologia piana.

Tracciando per O' la circonferenza massima prospettiva della perpendicolare su γ per O alla retta p si incide la circonferenza b nei punti A e B omologhi dei punti A' e B'; cosicché basta tracciare gli archi di circonferenza massima t' e z' congiungenti le coppie omologhe AA' e BB' per ottenere come intersezione di esse il centro Q'.

Sostituendo alla retta dell'omologia piana la circonferenza massima si può affermare che circonferenze omologhe si incidono sulla circonferenza "asse di omologia" e ancora che ciascuna coppia di punti omologhi appartiene ad una stessa circonferenza contenente il centro di omologia.

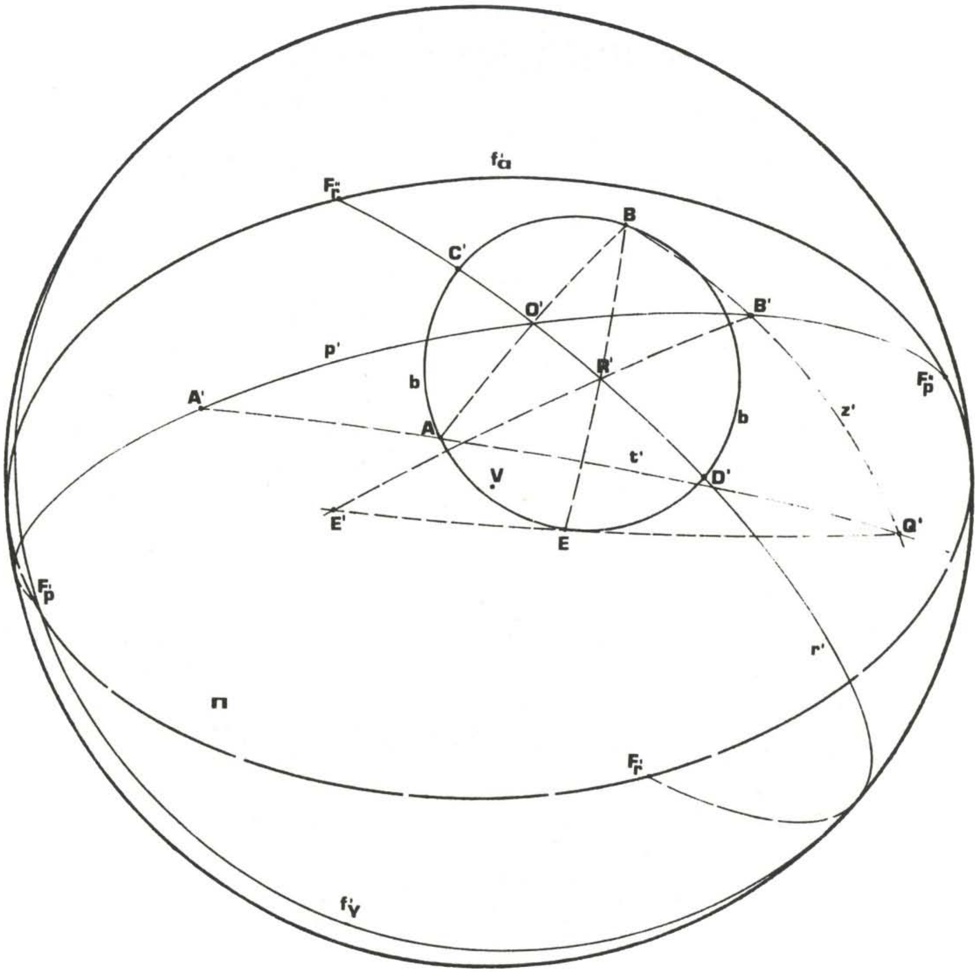
Considerando, quindi un qualsiasi punto G della b, il suo omologo G' deve trovarsi certamente sulla circonferenza massima t' per G e Q': basterà tracciare la circonferenza massima omologa della circonferenza massima contenente G e B (circonferenza per B' ed R') per ottenere come intersezione con la t' il punto G' cercato appartenente alla curva c', omologa della b e prospettiva della circonferenza c.

Prospettiva della ellisse (Tav. 40).

La prospettiva dell'ellisse è, in generale, un'ellisse "sferica" tranne quando la direttrice ortogonale all'asse, nel cono proiettante l'ellisse, è una circonferenza, oppure quando l'ellisse appartiene ad un piano proiettante: nel primo caso la prospettiva dell'ellisse è ovviamente una circonferenza, mentre nel secondo è un arco di circonferenza massima.

(10) - La condizione che individua tra le infinite possibili circonferenze omologhe la b è quella di avere assunto per essa come diametro C ' D '. Solo in tal caso, infatti, la configurazione omologica è la proiezione di una prospettività in cui si è instaurato un rapporto proiettivo tramite gli stessi elementi geometrici, diametro e corda ad esso coniugata, figuranti nella prospettività fra la c e la c' (in cui, in particolare, si considerano due diametri coniugati): le corde C'D' e A'B' della c' sono, cioè, ancora una volta, proiezione di un diametro C'D' e di una corda AB ad esso coniugata della circonferenza b.

T. 40



Data allora la giacitura di un generico piano α su cui giace l'ellisse, note le proiezioni A'B' e C'D' rispettivamente dell'asse minore e dell'asse maggiore di essa, si tracci la circonferenza b avente come diametro, per esempio, il segmento C'D' (ma poteva considerarsi anche il segmento A'B') : sul piano γ contenente la circonferenza b può operarsi l'omologia ad asse proprio e centro proprio fra la circonferenza b e l'ellisse c', prospettiva dell'ellisse c, essendo note di c' due corde prospettive dei due assi di c.

Proiettando allora la costruzione sulla sfera, può operarsi ancora quella omologia "sferica" di cui si è detto a proposito della prospettiva della circonferenza, omologia che ha asse nella circonferenza massima per C'D' e centro in Q', intersezione degli archi di circonferenza massima t' e z' congiungenti le coppie omologhe AA' e BB'.

Prospettiva della parabola (Tav. 41).

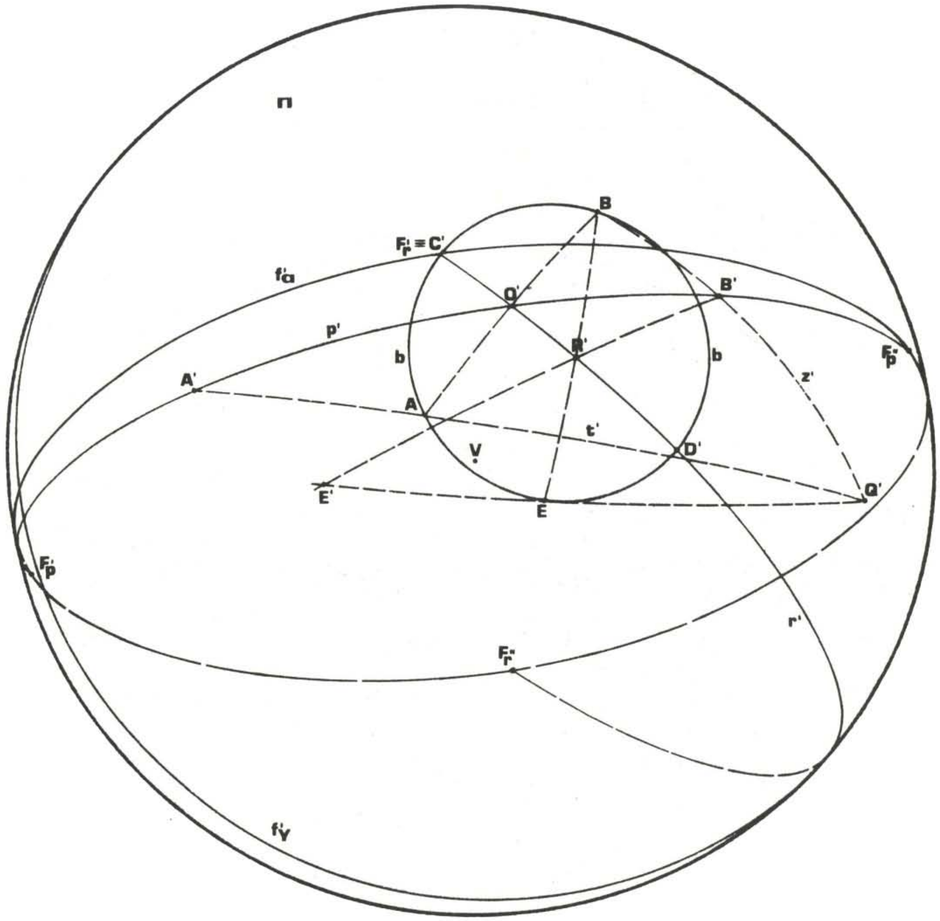
La prospettiva della parabola è, generalmente, un'ellisse "sferica".

Se, però, la direttrice ortogonale all'asse, nel cono proiettante la parabola, è una circonferenza, la prospettiva è una circonferenza, e ancora, se la parabola giace su un piano proiettante, la prospettiva di essa è un arco di circonferenza massima.

Data allora la giacitura del piano α contenente la parabola, proiettiamo adesso l'asse della parabola ed una corda ortogonale ad esso: si ottengono sulla sfera rispettivamente gli archi di circonferenza massima C'D' ed A'B'. (I1 punto C' deve ovviamente appartenere alla $f\,'\alpha$, essendo la prospettiva del punto improprio della parabola; D' è la prospettiva del vertice).

A tal punto può operarsi l'omologia "sferica" secondo quanto esposto nei paragrafi precedenti.

T. 41



Prospettiva dell'iperbole (Tav. 42)

La prospettiva dell'iperbole si spezza, in generale, in due curve gobbe, ciascuna appartenente ad una ellisse "sferica", tranne i casi in cui la direttrice ortogonale all'asse, nel cono proiettante l'iperbole, è una circonferenza, ovvero quando l'iperbole appartiene ad un piano proiettante: nel primo caso la prospettiva si spezza in due archi appartenenti a circonferenze uguali e parallele, mentre nel secondo la prospettiva è data da uno, due o tre archi di circonferenza massima secondo che V, centro di proiezione, sia interno ad uno dei due rami dell'iperbole, esterno ad entrambi, o appartenga infine ad uno di essi.

Le due ellissi "sferiche" a cui, generalmente, appartengono i due rami prospettiva dell'iperbole, sono uguali e l'insieme di esse assume come polo di simmetria il centro V di proiezione.

Nota dunque la giacitura del piano α , cui appartiene l'iperbole, si traccino le prospettive C', D' dei vertici e p' dell'asse dell'iperbole.

Consideriamo la circonferenza massima f 'γ ortogonale alla C'D' per il punto M medio dell'arco C'D', prospettiva del segmento congiungente i vertici dell'iperbole: tracciamo due circonferenze t'γ e t''γ parallele alla f 'γ e contenenti ciascuna uno dei due punti C' e D' prospettive dei vertici.

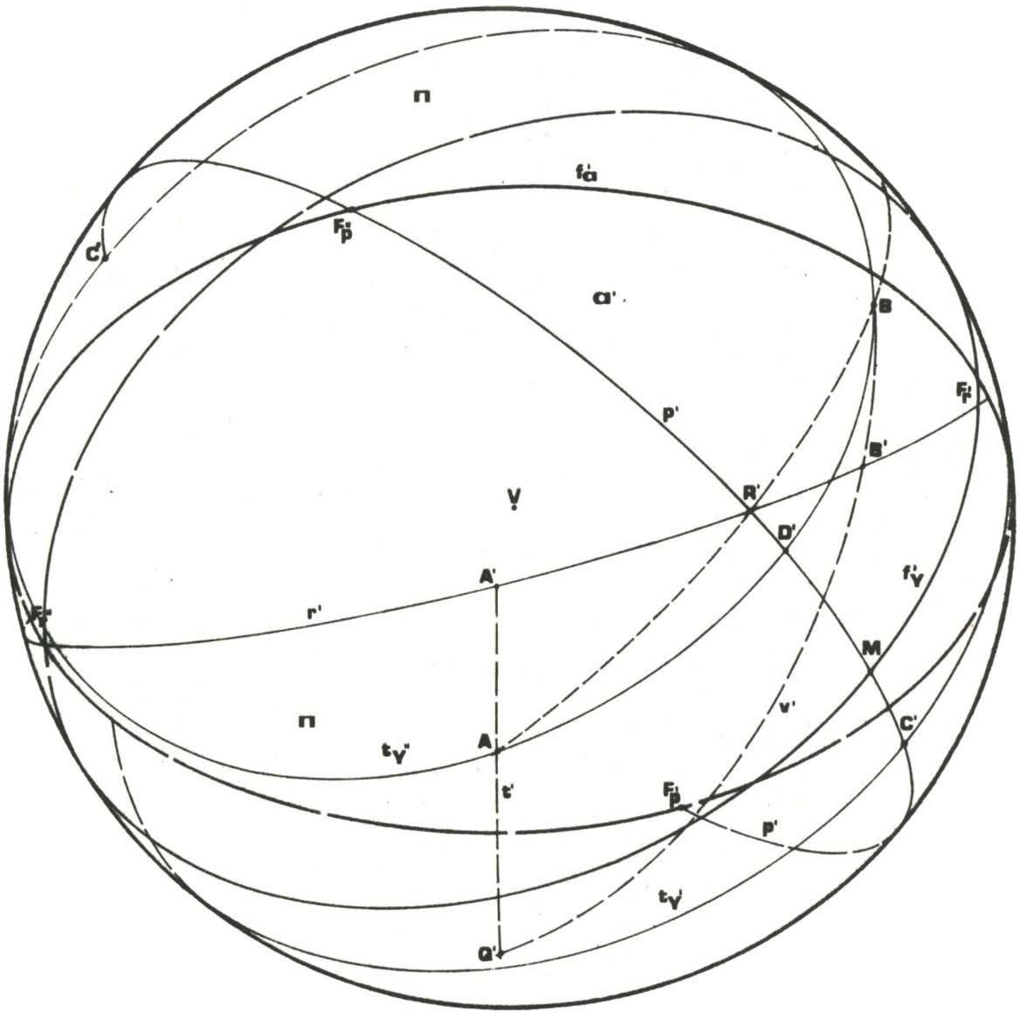
Le due circonferenze possono assumersi allora come traccia di due piani paralleli secanti la sfera: considerando, ad esempio, la t''γ , essa contiene la prospettiva reale D' del vertice D dell'iperbole e la prospettiva immaginaria C'' dell'altro, diametralmente opposti rispetto al centro di essa, cosicché l'arco sulla p', compreso fra D' e C'', rappresenta la prospettiva, in parte reale ed in parte immaginaria, dell'asse dell'iperbole.

Evidentemente la porzione reale è quella appartenente all'emisfero α' prospettiva del piano α e quindi si comprende come, ripetendosi gli stessi concetti per la t'γ ,la prospettiva reale dell'asse sia scissa in due archi sulla p' aventi ciascuno un estremo sulla f 'α e l'altro nella prospettiva di un vertice.

Ritornando alla circonferenza t''y ,essa, ovvero la t‘ y , per le stesse considerazioni fatte in precedenza a proposito delle altre coniche, può considerarsi curva omologa di una delle due ellissi sferiche alle quali appartiene la prospettiva i' dell'iperbole, nell'omologia "sferica" che ha per asse la p' e come centro Q', punto intersezione degli archi di circonferenza massima t' e v' congiungenti punti omologhi come AA' e BB'.

Anche in questo caso l'arco di circonferenza massima congiungente A'B'' è la prospettiva della generica corda AB ortogonale all'asse dell'iperbole, ed i punti A e B sono forniti dall'intersezione della circonferenza massima per R', ortogonale alla p', con la t''γ .

T.42



E' chiaro, allora, che ciascun punto delle due circonferenze t'γ e t'' γ , compreso nell'emisfero a', fornisce come omologo nelle due omologie suddette un punto della prospettiva reale dell'iperbole.

Prospettiva della sfera (Tavole 43,44).

La prospettiva della sfera, è sempre una circonferenza quando V è esterno ad essa, essendo in tal caso circolare la direttrice ortogonale all'asse nel cono proiettante il contorno apparente di essa; se invece V è interno ad essa, il contorno apparente non esiste e la prospettiva coincide con la sfera quadro.

La prospettiva O' del centro della sfera è anche la prospettiva del centro della circonferenza s' prospettiva della sfera: pertanto, noto un punto T' della s', è possibile tracciare l'intera circonferenza (basta fissare un estremo della centina in O' e ruotare, bloccando la punta tracciante in T').

a) Primo metodo

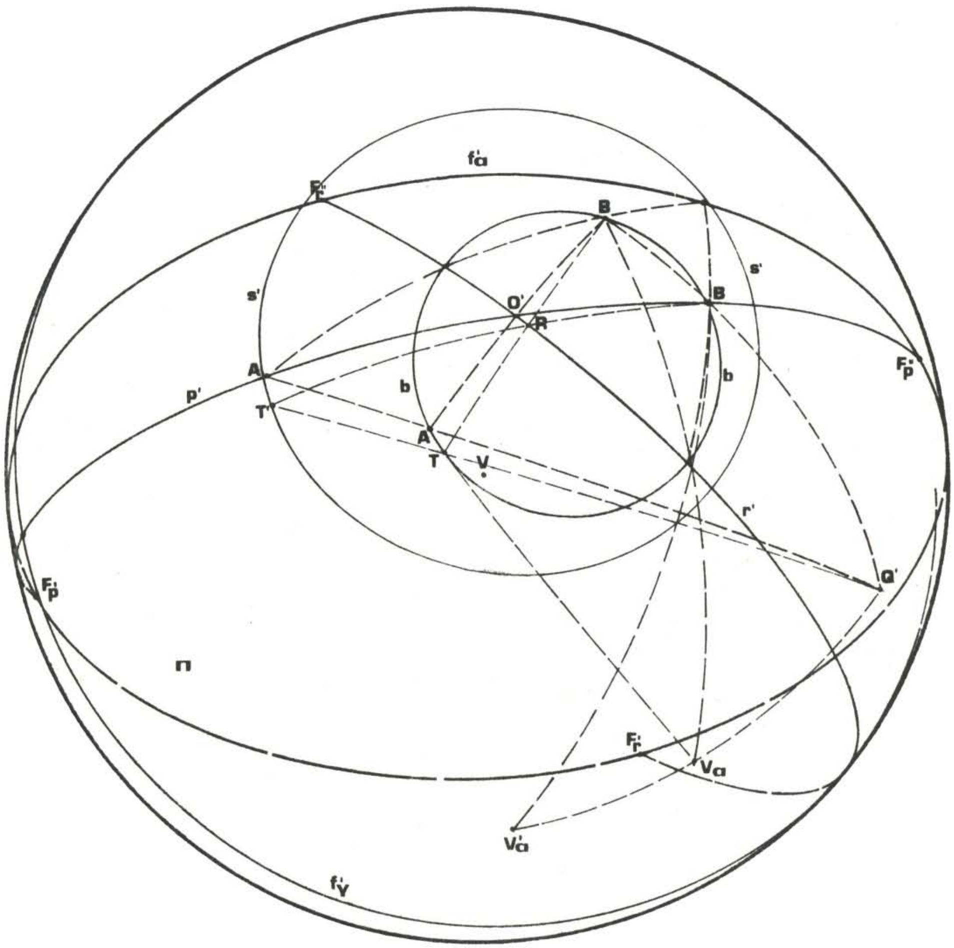
Un primo metodo fornisce il punto T' come prospettiva di uno dei due punti in cui il cono proiettante tange una prefissata circonferenza massima della sfera (Tav. 43).

Consideriamo dunque la circonferenza massima c parallela al generico piano α e individuiamo, tramite la rappresentazione prospettica di due diametri ortogonali di essa, gli elementi dell'omologia sferica, che ci permetterebbe di tracciarne la prospettiva c'.

Le tangenti la circonferenza c dal punto Vα proiezione di V sul piano contenente la c, individuano due punti del contorno apparente della sfera: occorre dunque trovare la prospettiva T' di uno di essi.

La prospettiva sferica V' α del punto Vα coincide con la prospettiva della retta proiettante ortogonale ad α . Noto il punto V'α , tramite l'omologia sferica è possibile trovare facilmente il punto T': basta, infatti, come avviene nell'omologia piana, ricavare dapprima l'omologo Vα di V'α, quindi mandare per Vα una delle due circonferenze massime tangenti la circonferenza omologa ad esempio in T , e infine ricavare l'omologo T' di T.

T.43



b) Secondo metodo

Un secondo metodo permette di ricavare per altra via il punto T' (Tav. 44). Siano note della sfera s' la prospettiva O' del centro O e la prospettiva a' della circonferenza massima a ortogonale all'asse O-O'.

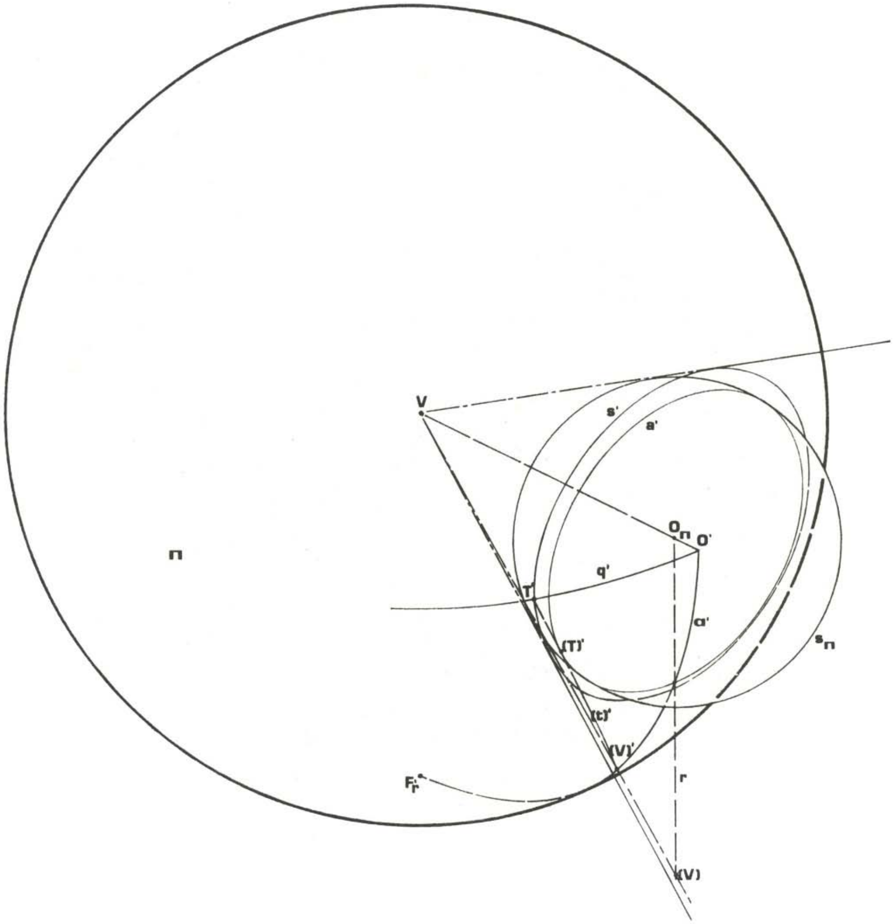
Immaginiamo di sostituire alla sfera s la sfera s_π,avente il centro O_π coincidente col centro di a', contenente la circonferenza a' e tangente sempre internamente il cono proiettante: scelto un qualsiasi piano proiettante α- di traccia α' contenente O_π ,immaginiamo di ribaltare V sulla retta r, intersezione del piano α- col piano contenente la circonferenza a', in (V) distante quanto V da O_π .

La prospettiva (V)' di (V) è di immediato tracciamento, formando il segmento V-(V) angolo di quarantacinque gradi col segmento V- O_π.

La circonferenza massima (t)' per (V)' tangente la a' nel punto (T)' è la prospettiva di (t), una delle due rette tangenti per (V) la a'; retta (t) che può considerarsi nata dal ribaltamento della proiettante t per V tangente in T la sfera.

Pertanto l'intersezione della (t)' con la circonferenza massima q' ortogonale alla α fornisce T' traccia e prospettiva della retta t e quindi prospettiva anche di un punto del contorno apparente della sfera.

T.44



Conclusione

I risultati ottenuti in questa trattazione si ritengono soddisfacenti e incoraggianti al prosieguo di una ricerca così avvincente, straordinaria e ricca di risvolti imprevedibili.

In effetti lo studio compiuto stimola e suggerisce sin d'ora non solo una vasta applicazione della teoria sviluppata nel campo dell'architettura e dell'arte, ma anche i riflessi che tale applicazione potrà suscitare in altri campi (come quello cinematografico, ad esempio, nello studio di una proiezione su schermo emisferico).

In attesa di futuri sviluppi, si ritiene quindi di dovere proseguire con entusiasmo la via intrapresa, non soltanto approfondendo la ricerca già svolta (punto di vista al centro del quadro sferico), ma trattando tutta la casistica citata in premessa riguardo alla posizione del punto di vista rispetto al quadro sferico.

Ci si prefigge di passare successivamente allo studio di nuove teorie che permettano la rappresentazione prospettica su altre superfici quadriche, al fine di ampliare sempre più i confini della scienza della rappresentazione e, quindi, la stessa capacità espressiva dell'uomo.

Bibliografia

M. DOCCI, La prospettiva curvilinea, in Didattica del disegno, rivista di storia e tecnica del disegno, editrice La Scuola, 1975, anno VI,n.3.

J.LABORDE, La Geometrie des Spheroides, Institut geographique national, Paris,1944.

F. ENRIQUES, Lezioni di Geometria Descrittiva, Zanichelli, Bologna,1925.

G. SELLER, Geometria Descrittiva, U. Hoepli,Milano 1960.

G. LORIA, Metodi di Geometria Descrittiva, U. Hoepli, Milano 1925.

G. LORIA, Complementi di Geometria Descrittiva, U. Hoepli, Milano 1924.

M. ALBEGGIANI, Applicazioni della Geometria Descrittiva, Castiglia, Palermo 1926.

M. INZERILLO, Lezioni di Teoria del Disegno Prospettico, Co.Gra.S.,Palermo 1977.

M. INZERILLO, Lezioni di Applicazione di Geometria Descrittiva, Co.Gra.S.,Palermo 1977.

R. FILOSTO,Lineamenti teorici del Disegno, I.L.A. Palma, Palermo, Sao Paulo, 1968.

V. CAPITANO, Applicazioni di Geometria Proiettiva e Descrittiva al disegno delle forme geometriche elementari, I.L.A. Palma, Palermo, Sao Paulo,1972.

INDICE